

해석역학 Q&A

Question) #3.6 강제 조화 진동 : 공명

구동력 진동수가 진동자 고유 진동수보다 현저히 작을 때 관성항 $m\ddot{x}$ 는 탄성력 $-kx$ 보다 현저히 작아 0으로 무시할 수 있는 이유를 알고 싶습니다.

Answer)

탄성계수가 k 인 용수철의 한쪽 끝은 벽면에 고정되어 있으며, 다른 한쪽 끝은 질량이 m 인 물체가 연결되어 고유 진동수 ω_0 로 진동하고 있습니다.

이때 공기의 저항 및 기타 외부 저항이 없어 감쇠($-c\dot{x}$)가 없으며, 물체에 $F_0\cos\omega t$ 의 구동력이 가해지고 있으며, $\omega \ll \omega_0$ 인 시스템이 있습니다.

이와 같은 상황을 운동방정식으로 표현하면

$$m\ddot{x} + kx = F_0\cos\omega t$$

이며, 위의 방정식의 해를 $x = A\cos\omega t$ 라 가정하면 다음의 관계식을 얻을 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega A\sin\omega t \\ \ddot{x} &= -\omega^2 A\cos\omega t\end{aligned}$$

$$m\ddot{x} + kx = F_0\cos\omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$-\omega^2 A\cos\omega t + \frac{k}{m}A\cos\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$A = \frac{F_0/m}{k/m - \omega^2}$$

위의 관계식에서 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 으로 두면 진폭 A 와 방정식의 해는 다음과 같습니다.

$$A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \approx \frac{F_0/m}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

$$x \approx A\cos\omega t$$

그러므로, 아주 낮은 진동수에($\omega \ll \omega_0$)서 용수철은 압축과 신장이 천천히 일어나며, 물체는 구동력과 거의 같은 위상으로 움직이게 됩니다. 이는 아주 낮은 진동수에서는 운동방정식의 관성항 $m\ddot{x}$ 가 탄성력 $-kx$ 에 비해 무시할 수 있을 정도로 작아 $m\ddot{x} = -kx + F_0\cos\omega t \approx 0$ 이

되어 $x \approx \frac{F_0}{k}\cos\omega t$ 가 됨을 직관적으로 이해할 수 있습니다.