

정답 및 풀이



A n s w e r & S o l u t i o n

01 벡터(Vectors)

1.1 직교좌표계와 벡터

예제 1.1

생략(←강의에서 설명)

예제 1.2

- (1) $|\vec{u}| = 5$
- (2) $\vec{u} + \vec{v} = \langle 2, 1, 8 \rangle$
- (3) $\vec{u} - \vec{v} = \langle 6, -1, -2 \rangle$
- (4) $3\vec{v} = \langle -6, 3, 15 \rangle$
- (5) $2\vec{u} + 5\vec{v} = \langle -2, 5, 31 \rangle$

예제 1.3

$$\langle 14, 4, 15 \rangle = 14\vec{i} + 4\vec{j} + 15\vec{k}$$

예제 1.4

$$\pm \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right\rangle$$

1.2 벡터의 내적과 정사영

예제 2.1

생략(←강의에서 설명)

예제 2.2

생략(←강의에서 설명)

예제 2.3

생략

예제 2.4

생략

예제 2.5

생략

예제 2.6

(1) 6

(2) 7

예제 2.7

$$\frac{\pi}{4}$$

예제 2.8

$$\frac{\pi}{3}$$

예제 2.9

$$\frac{\pi}{3}$$

예제 2.10

$$\frac{\pi}{3}$$

예제 2.11

①

예제 2.12

0

예제 2.13

-17

예제 2.14

2

예제 2.15

(i) 스칼라 사영 : $\text{comp}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{3}{\sqrt{14}}$

(ii) 벡터 사영 : $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14} \right\rangle$

예제 2.16

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

예제 2.17

$$\frac{5}{3}$$

예제 2.18

④

예제 2.19

36J(줄)

예제 2.20

③

1.3벡터의 외적

예제 3.1

생략

예제 3.2

생략

예제 3.3

생략

예제 3.4

$\langle 4, 6, 7 \rangle$

예제 3.5

$\langle -43, 13, 1 \rangle$

예제 3.6

③

예제 3.7

$$\vec{a} \times 5\vec{b} = 5\vec{a} \times \vec{b}$$

예제 3.8

- 3

예제 3.9

④

예제 3.10

②

예제 3.11

②

예제 3.12

①

예제 3.13

④

예제 3.14

③

예제 3.15

②

예제 3.16

$$\sqrt{3}$$

예제 3.17

③

예제 3.18

④

예제 3.19

③

예제 3.20

①

예제 3.21

④

예제 3.22

③

1.4삼중곱

예제 4.1

생략.

예제 4.2

생략.

예제 4.3

생략.

예제 4.4

생략.

예제 4.5

③

예제 4.6

4

예제 4.7

④

예제 4.8

- 1

예제 4.9

②

예제 4.10

$\langle -2, 2, -2 \rangle$

예제 4.11

②

예제 4.12

④

예제 4.13

④

예제 4.14

③

예제 4.15

②

예제 4.16

①

예제 4.17

③

종합 1.1

③

종합 1.2

②

종합 1.3

③

종합 1.4

①

종합 1.5

⑤

종합 1.6

②

종합 1.7

③

종합 1.8

③

종합 1.9

②

종합 1.10

②

종합 1.11

②

종합 1.12

③

종합 1.13

③

종합 1.14

②

종합 1.15

②

종합 1.16

②

종합 1.17

③

종합 1.18

③

종합 1.19

①

종합 1.20

③

종합 1.21

2

종합 1.22

④

종합 1.23

①

종합 1.24

d

종합 1.25

④

종합 1.26

④

02직선과 평면의 방정식 (Equations of line & plane)

2.1직선의 방정식

예제 1.1

(i) 벡터방정식 :

$$\vec{r}(t) = \langle 5 + t, 1 + 4t, 3 - 2t \rangle$$

(ii) 매개방정식 :

$$x = 5 + t, y = 1 + 4t, z = 3 - 2t$$

예제 1.2

(i) 매개방정식 :

$$x = 2 + t, y = 4 - 5t, z = -3 + 4t$$

(ii) 대칭방정식 :

$$x - 2 = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}$$

(iii) $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$

예제 1.3

생략.

2.2평면의 방정식

예제 2.1

(i) 평면의 방정식 :

$$2x + 3y + 4z = 12$$

(ii) 좌표축과 만나는 점 :

$$(6, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 3)$$

예제 2.2

④

예제 2.3

$$2x + 8y - 5z = -15$$

예제 2.4

①

예제 2.5

②

예제 2.6

②

예제 2.7

③

예제 2.8

②

2.3직선과 평면의 위치관계

예제 3.1

$$k = 16$$

예제 3.2

④

예제 3.3

③, ⑤

예제 3.4

①

예제 3.5

②

예제 3.6

③

예제 3.7

④

예제 3.8

④

예제 3.9

①

예제 3.10

④

2.4직선과 평면의 사잇각

예제 4.1

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

예제 4.2

⑤

예제 4.3

②

예제 4.4

②

2.5교점과 교선

예제 5.1

②

예제 5.2

②

예제 5.3

⑤

예제 5.4

①

2.6공간에서의 거리

예제 6.1

(1) 생략.

(2) $\sqrt{\frac{97}{3}}$

예제 6.2

(1) 생략.

(2) $\frac{17}{7}$

예제 6.3

③

예제 6.4

①

예제 6.5

①

예제 6.6

④

예제 6.7

③

예제 6.8

⑤

예제 6.9

②

예제 6.10

④

종합 2.1

③

종합 2.2

③

종합 2.3

④

종합 2.4

①

종합 2.5

③

종합 2.6

①

종합 2.7

③

종합 2.8

④

종합 2.9

④

종합 2.10

①

종합 2.11

④

종합 2.12

④

종합 2.13

④

종합 2.14

④

종합 2.15

④

종합 2.16

②

종합 2.17

⑤

종합 2.18

②

종합 2.19

c

종합 2.20

④

종합 2.21

③

종합 2.22

③

종합 2.23

①

종합 2.24

②

종합 2.25

④

종합 2.26

②

종합 2.27

①

종합 2.28

①

03일변수 벡터함수 (Vector-valued function)

3.1일변수 벡터함수의 극한과 연속

예제 1.1

$$\text{Dom}(\mathbf{r}(t)) = [0, 3]$$

예제 1.2

생략.

예제 1.3

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \langle 1+t, 3-4t, -2+5t \rangle, 0 \leq t \leq 1$$

예제 1.4

생략.

예제 1.5

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \langle \cos t, \sin t, 2 - \sin t \rangle, 0 \leq t \leq 2\pi$$

예제 1.6

$$(i) \text{Dom}(\mathbf{r}(t)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) = \langle 1, 0, 1 \rangle$$

예제 1.7

$$(i) \mathbb{R} - \{0\} \text{에서 연속.}$$

$$(ii) \vec{\mathbf{r}}(0) = \langle 0, -1, 1 \rangle \text{로 정의하면 } \mathbb{R} \text{ 전체에서 연속.}$$

3.2일변수 벡터함수의 미분

예제 2.1

생략.

예제 2.2

$$(1) \langle 3t^2, (1-t)e^{-t}, 2\cos(2t) \rangle$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 1, 0, 2 \rangle$$

예제 2.3

$$(i) \mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{1}{2\sqrt{t}}, -1 \right\rangle$$

$$(ii) \mathbf{r}(1) = \langle 1, 1 \rangle \text{ \& } \mathbf{r}'(1) = \left\langle \frac{1}{2}, -1 \right\rangle$$

예제 2.4

$$x = -2t, y = 1, z = \frac{\pi}{2} + t, t \in \mathbb{R}$$

예제 2.5

생략.

예제 2.6

생략.

예제 2.7

생략.

3.3일변수 벡터함수의 적분과 호의 길이

예제 3.1

$$(1) \int \mathbf{r}(t) dt = \langle 2\sin t, -\cos t, t^2 \rangle + \vec{\mathbf{c}}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{r}(t) dt = \left\langle 2, 1, \frac{\pi^2}{4} \right\rangle$$

예제 3.2

$$(1) \int_0^1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)(t) dt = \frac{4}{3}$$

$$(2) \int_0^1 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)(t) dt = \left\langle -\frac{7}{6}, \frac{13}{20}, -\frac{4}{5} \right\rangle$$

예제 3.3

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, t^3, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \right\rangle$$

예제 3.4

$$2\sqrt{2}\pi$$

예제 3.5

$$\mathbf{r}(t(s)) = \left\langle \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

예제 3.6

④

예제 3.7

①

3.4곡률

예제 4.1

생략.

예제 4.2

생략.

예제 4.3

$$(i) \kappa(t) = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}$$

$$(ii) \kappa(0) = 2$$

예제 4.4

$$\kappa(0) = 2, \kappa(1) = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \kappa(2) = \frac{2}{17\sqrt{17}}$$

예제 4.5

$$(i) \vec{v} = \langle -1, -18, 2 \rangle$$

$$(ii) \vec{a} = \langle 6, -42, 2 \rangle$$

$$(iii) \vec{a}_T = \frac{754}{\sqrt{329}}, \vec{a}_N = \frac{50\sqrt{10}}{\sqrt{329}}$$

예제 4.6

$$(i) \vec{v}(t) = \langle -2\omega \sin(\omega t), 3\omega \cos(\omega t), -e^{-t} \rangle$$

$$(ii) \vec{a}(t) = \langle -2\omega^2 \cos(\omega t), -3\omega^2 \sin(\omega t), e^{-t} \rangle$$

$$(iii) \vec{a}_T(t) = \frac{-5\omega^3 \cos(\omega t) \sin(\omega t) - e^{-2t}}{\sqrt{4\omega^2 + 5\omega^2 \cos^2(\omega t) + e^{-2t}}}$$

$$\vec{a}_N(t) = \sqrt{\|\vec{a}(t)\|^2 - |\vec{a}_T(t)|^2}$$

예제 4.7

④

예제 4.8

$$(i) \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle 1, 2, 1 \rangle$$

$$(ii) \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -1, 0, 1 \rangle$$

$$(iii) \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1, -1, 1 \rangle$$

$$(iv) \mathbf{a}_T = \sqrt{6}, \mathbf{a}_N = \sqrt{2}$$

$$(v) \kappa = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

예제 4.9

$$(i) \vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle -1, 0, \sqrt{2} \rangle$$

$$(ii) \vec{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle 0, -1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

$$(iii) \vec{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\rangle$$

$$(iv) \vec{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3\sqrt{10}} \langle -2, -6, 5\sqrt{2} \rangle$$

$$(v) \vec{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{6} \langle 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 \rangle$$

$$(vi) \vec{a}_T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \vec{a}_N\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{11}{3\sqrt{10}}$$

$$(vii) \vec{\kappa}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{18} \langle -2, -6, 5\sqrt{2} \rangle$$

종합 3.1

③

종합 3.2

①

종합 3.3

①

종합 3.4

⑤

종합 3.5

③

종합 3.6

$$f(s) = \left(\frac{1 - e^{2s}}{1 + e^{2s}}, \frac{2e^s}{1 + e^{2s}}, \ln \left(\frac{2e^s}{1 + e^{2s}} \right) \right), \quad 0 \leq s < \infty$$

종합 3.7

①

종합 3.8

①

종합 3.9

①

종합 3.10

③

종합 3.11

②

종합 3.12

②

종합 3.13

④

종합 3.14

③

종합 3.15

③

종합 3.16

①

종합 3.17

③

종합 3.18

③

종합 3.19

①

종합 3.20

(a)

$$\bullet \quad T(t) = \frac{1}{3} \langle -2\sin t, 2\cos t, \sqrt{5} \rangle$$

$$\bullet \quad N(t) = -\langle \cos t, \sin t, 0 \rangle$$

$$\bullet \quad B(t) = \left\langle -\frac{\sqrt{5}}{3} \sin t, -\frac{\sqrt{5}}{3} \cos t, \frac{2}{3} \right\rangle$$

$$(b) \quad \sqrt{5}y - 2z = 0$$

종합 3.21

④

종합 3.22

⑤

종합 3.23

$$\text{접촉원: } \left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{11}{4} \right)^2 = 4^2$$

종합 3.24

④

종합 3.25

①

종합 3.26

①

종합 3.27

③

종합 3.28

④

종합 3.29

②

종합 3.30

③

04다변수 스칼라함수 (Function of multi-variables)

4.1이차곡면

예제 1.1

생략.

예제 1.2

생략.

예제 1.3

생략.

4.2다변수 스칼라함수의 개념 및 정의

예제 2.1

- (1) $\{(x, y) \mid y \geq x^2\} - \{(0, 1)\}$
- (2) $\{(x, y) \mid x < y^2\}$

예제 2.2

- (i) 정의역 : $\left\{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$
- (ii) 치역 : $[0, 2]$

예제 2.3

- (i) $k = 1$ 일 때, $l_1(f) = \{(0, 0)\}$.
- (ii) $k > 1$ 일 때,
 $l_k(f) = \{(x, y) \in \text{Dom}(f) \mid 4x^2 + y^2 + 1 = k\}$.

예제 2.4

- (1) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$
- (2) $\{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 > 1\}$

4.3다변수 스칼라함수의 극한

예제 3.1

- | | |
|------------|------------|
| (1) 수렴. 0 | (2) 발산 |
| (3) 발산 | (4) 발산 |
| (5) 수렴. 0 | (6) 수렴. 1 |
| (7) 수렴. 1 | (8) 발산. |
| (9) 발산. | (10) 발산. |
| (11) 수렴. 1 | (12) 수렴. 0 |
| (13) 발산. | (14) 발산. |
| (15) 수렴. 0 | (16) 수렴. 0 |
| (17) 발산. | (18) 수렴. 0 |
| (19) 발산. | (20) 발산. |
| (21) 발산. | (22) 수렴. 0 |

예제 3.2

⑤

예제 3.3

①

예제 3.4

③

예제 3.5

①

4.4다변수 스칼라함수의 연속

예제 4.1

- (1) \mathbb{R}^2 에서 연속.
- (2) \mathbb{R}^2 에서 연속.
- (3) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 에서 연속.

예제 4.2

②

예제 4.3

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

예제 4.4

④

종합 4.1

생략.

종합 4.2

②

종합 4.3

①

종합 4.4

①

종합 4.5

(나), (다).

종합 4.6

$$A = -\frac{\pi}{2}, B = \frac{\pi}{2}$$

종합 4.7

②

종합 4.8

⑤

05다변수 스칼라함수의 미분 (Differentiation)

5.1편도함수

예제 1.1

- (i) $f_x(2, -1) = 1$
 (ii) $f_y(2, -1) = -2$

예제 1.2

- (i) $f_x\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = -1$
 (ii) $f_y\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 0$

예제 1.3

- (i) $f_x(1, 0, 0) = 0$
 (ii) $f_y(1, 0, 0) = 1$
 (iii) $f_z(1, 0, 0) = -1$

예제 1.4

- (1) $f_x(x, y) = 3, f_y(x, y) = -8y^3$
 (2) $f_x(x, y) = e^{3y}, f_y(x, y) = 3xe^{3y}$
 (3) (i) $f_x(x, y) = 4046(2x + 3y)^{2022}$
 (ii) $f_y(x, y) = 6069(2x + 3y)^{2022}$
 (4) (i) $f_x(x, y) = \frac{2y}{(x + y)^2}$
 (ii) $f_y(x, y) = \frac{-2x}{(x + y)^2}$
 (5) (i) $f_x(x, y) = \cos x \cos y$
 (ii) $f_y(x, y) = -\sin x \sin y$
 (6) (i) $f_x(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}$
 (ii) $f_y(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$
 (7) (i) $f_x(x, y) = \left(1 - \frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}$
 (ii) $f_y(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$

- (8) (i) $f_x(x, y) = 2\sin(x - 3y)\cos(x - 3y)$
 (ii) $f_y(x, y) = -6\sin(x - 3y)\cos(x - 3y)$
 (9) (i) $f_x(x, y, z) = y\sin^{-1}(yz)$
 (ii) $f_y(x, y, z) = x\sin^{-1}(yz) + \frac{xyz}{\sqrt{1 - (yz)^2}}$
 (iii) $f_z(x, y, z) = \frac{xy^2}{\sqrt{1 - (yz)^2}}$
 (10) (i) $f_x(x, y, z) = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$
 (ii) $f_y(x, y, z) = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$
 (iii) $f_z(x, y, z) = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

예제 1.5

- (1) (i) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x - 3yz}{2z - 3xy}$
 (ii) $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y - 3xz}{2z - 3xy}$
 (2) (i) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz - 4x^3z}{y}$
 (ii) $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz + z \ln z}{y}$

예제 1.6

- (1) $f_{xx} = 6x + 2y^3, f_{xy} = 6xy^2$
 $f_{yx} = 6xy^2, f_{yy} = 6x^2y - 4$
 (2) $f_{xx} = -y^2\sin(xy), f_{yy} = -x^2\sin(xy)$
 $f_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy) = f_{yx}$
 (3) $f_{xx} = 2y - y\sin x, f_{yy} = -\cos y$
 $f_{xy} = 2x + \cos x = f_{yx}$
 (4) $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{(x + y)^2}$

예제 1.7

$$x = 1, y = 2 + t, z = -4 - 8t \quad t \in \mathbb{R}$$

예제 1.8

- (i) 매개방정식 : $x = 1 + t, y = 2, z = 2 - 2t$

(ii) 대칭방정식 : $x - 1 = \frac{z - 2}{-2}, y = 2$

예제 1.9

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2 + c \quad (c : \text{상수})$$

예제 1.10

(1) 불연속

(2) $f_x(0, 0) = 0$ & $f_y(0, 0) = 0$

예제 1.11

(1) $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$

(2) $f_{xy}(0, 0) = 0, f_{yx}(0, 0) = 1$

예제 1.12

(1) (i) $f_x(x, y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$

(ii) $f_y(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

(2) $f_x(0, 0) = 0$ & $f_y(0, 0) = 0$

(3) $f_{xy}(0, 0) = -1$ & $f_{yx}(0, 0) = 1$

예제 1.13

생략.

예제 1.14

생략.

예제 1.15

③

5.2 접평면과 선형근사

예제 2.1

(i) $\pi : 4x + 2y - z = 3$

(ii) $L(x, y) = 4x + 2y - 3$

예제 2.2

6.3

예제 2.3

(i) $L(x, y, z) = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z$

(ii) $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$
 $\approx \frac{3}{7} \cdot (3.02) + \frac{2}{7} \cdot (1.97) + \frac{6}{7} \cdot (5.99)$

예제 2.4

(1) 불연속

(2) $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$

(3) 불연속

5.3 다변수 스칼라함수의 미분가능성

예제 3.1

생략.

예제 3.2

생략.

예제 3.3

(i) $L(x, y) = x + y$

(ii) $f(1.1, -0.1) \approx L(1.1, -0.1) = 1$

예제 3.4

(1) $dz = \langle -2e^{-2x} \cos(2\pi t), -2\pi e^{-2x} \sin(2\pi t) \rangle \cdot \langle dx, dt \rangle$

(2) $du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \langle x, y \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle$

(3) $dT = -\frac{1}{(1 + uvw)^2} \langle v^2w, -1, uv^2 \rangle \cdot \langle du, dv, dw \rangle$

(4) $dL = e^{-y^2 - z^2} \langle z, -2xyz, x - 2xz^2 \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle$

예제 3.5

(i) $\Delta z = f(1.05, 2.1) - f(1, 2) = 0.9225$

(ii) $dz = \nabla f(1, 2) \cdot \langle 0.05, 0.1 \rangle = 0.9$

예제 3.6

$20\pi \text{ cm}^3$

예제 3.7

①

예제 3.8

③

예제 3.9

④

5.4 연쇄법칙과 음함수미분법

예제 4.1

(i) $\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t)$

(ii) $\left[\frac{dz}{dt} \right]_{t=0} = 6$

예제 4.2

(i) $\frac{\partial z}{\partial s} = \langle e^x \sin y, e^x \cos y \rangle \cdot \langle t^2, 2st \rangle$

(ii) $\frac{\partial z}{\partial t} = \langle e^x \sin y, e^x \cos y \rangle \cdot \langle 2st, s^2 \rangle$

예제 4.3

192

예제 4.4

(1) $\bullet \frac{\partial z}{\partial r} = 2r \frac{\partial z}{\partial x} + 2s \frac{\partial z}{\partial y}$

$\bullet \frac{\partial z}{\partial s} = 2s \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \frac{\partial z}{\partial y}$

(2)

$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = 2 \frac{\partial z}{\partial y} + 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4(r^2 + s^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = 2 \frac{\partial z}{\partial y} + 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4(r^2 + s^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 4s^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

예제 4.5

③

예제 4.6

③

예제 4.7

③

예제 4.8

④

예제 4.9

②

예제 4.10

⑤

예제 4.11

②

예제 4.12

③

예제 4.13

④

예제 4.14

$4u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4uv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial x}$

예제 4.15

생략.

예제 4.16

$$(i) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\ln y}{y-2z}$$

$$(ii) \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+yz}{y^2-2yz}$$

예제 4.17

①

예제 4.18

③

예제 4.19

①

예제 4.20

②

예제 4.21

④

예제 4.22

③

예제 4.23

①

5.5 테일러 전개와 정적분의 도함수**예제 5.1**

$$T_2(x, y) = x + 2y$$

예제 5.2

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2$$

예제 5.3

②

예제 5.4

$$T_2(f) = 1 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}(x-1) + \pi\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left\{ -\frac{\pi^2}{4}(x-1)^2 + \pi(x-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right\}$$

예제 5.5

$$\ln(1+s)$$

예제 5.6

$$\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\alpha)$$

예제 5.7

$$(1) \frac{1}{s}$$

$$(2) \ln 3$$

예제 5.8임의의 $\alpha > 0$ 에 대하여

$$\varphi(\alpha) := \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(\alpha x) - \tan^{-1}(x)}{x} dx \quad \dots \textcircled{1}$$

이라 하자. 이것을 α 에 대해서 미분하면

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(\alpha x) - \tan^{-1}(x)}{x} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\tan^{-1}(\alpha x) - \tan^{-1}(x)}{x} \right] dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1 + (\alpha x)^2} dx \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \alpha [\tan^{-1}(\alpha x)]_{x=0}^\infty \\ &= \frac{\pi}{2\alpha} \end{aligned}$$

이다. 즉, $\varphi'(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\alpha}$ 이고, 이것을 α 에 대해서 적분하면

$$\varphi(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln \alpha + C \quad \dots \textcircled{2}$$

을 얻을 수 있다. 또한 식 ①에 $\alpha = 1$ 을 대입하면

$$\varphi(1) = \int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(x)}{x} dx = 0$$

이고 식 ②에서

$$0 = \varphi(1) = \frac{\pi}{2} \ln(1) + C \Rightarrow C = 0$$

을 얻는다. 따라서 $\varphi(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln \alpha$ 이고, 여기에

$\alpha = \pi$ 를 대입하면

$$\frac{\pi}{2} \ln(\pi) = \varphi(\pi) = \int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(\pi x) - \tan^{-1}(x)}{x} dx$$

이다. 즉,

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(\pi x) - \tan^{-1}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln(\pi)$$

이다. ■

예제 5.9

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{25}{4}}$$

종합 5.1

③

종합 5.2

①

종합 5.3

④

종합 5.4

④

종합 5.5

④

종합 5.6

생략.

종합 5.7

아니오.

종합 5.8

④

종합 5.9

④

종합 5.10

③

종합 5.11

③

종합 5.12

①

종합 5.13

③

종합 5.14

①

종합 5.15

①

종합 5.16

②

종합 5.17

①

종합 5.18

②

종합 5.19

③

종합 5.20

④

종합 5.21

④

종합 5.22

③

종합 5.23

⑤

종합 5.24

④

종합 5.25

③

종합 5.26

④

종합 5.27

①

종합 5.28

①

종합 5.29

②

종합 5.30

②

종합 5.31

②

종합 5.32

④

종합 5.33

③

종합 5.34

②

종합 5.35

④

종합 5.36

④

종합 5.37

b

종합 5.38

②

종합 5.39

③

종합 5.40

①

종합 5.41

③

종합 5.42

①

종합 5.43

⑤

종합 5.44

②

종합 5.45

④

종합 5.46

②

종합 5.47

③

종합 5.48

④

종합 5.49

⑤

종합 5.50

④

종합 5.51

④

종합 5.52

⑤

06다변수 미분의 응용 (Applications of Differentiation)

6.1방향도함수와 그래디언트

예제 1.1

생략.

예제 1.2

$$(i) D_{\vec{u}}f(x, y) = \langle 3x^2 - 3y, -3x + 8y \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$(ii) D_{\vec{u}}f(1, 2) = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

예제 1.3

$$(i) \nabla f(x, y) = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

$$(ii) \nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

예제 1.4

$$\frac{32}{\sqrt{29}}$$

예제 1.5

$$(1) \nabla f(x, y, z) = \langle \sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz) \rangle$$

$$(2) -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

예제 1.6

$$(1) f_{\vec{u}}^{-1}(1, 1) = 2(u_1 + u_2)$$

$$(2) \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$(3) \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle, \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

예제 1.7

$$\frac{1}{5} \langle -4, 3 \rangle$$

예제 1.8

$$(1) 1$$

$$(2) \langle 1, 2 \rangle \text{ 방향으로 최댓값 } \sqrt{5}.$$

예제 1.9

$$(i) \nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8} \langle -1, -2, 6 \rangle \text{ 방향}$$

$$(ii) \text{ 최대 증가율 : } \frac{5}{8} \sqrt{41}$$

예제 1.10

$$(i) \text{ 접평면 : } 3x - 6y + 2z = -18$$

$$(ii) \text{ 법선의 방정식 : } \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{3z+9}{-2}$$

예제 1.11

$$(1) \text{ 생략.}$$

$$(2) \frac{2184}{25}$$

예제 1.12

$$\textcircled{1} \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$$

예제 1.13

$$\frac{9}{5}$$

예제 1.14

$$\textcircled{1}$$

예제 1.15

$$\textcircled{2}$$

예제 1.16

$$\textcircled{1}$$

예제 1.17

$$\textcircled{3}$$

예제 1.18

$$\textcircled{1}$$

예제 1.19

①

예제 1.20

①

예제 1.21

①

예제 1.22

①

예제 1.23

④

예제 1.24

②

예제 1.25

①

예제 1.26

④

예제 1.27

④

6.2 다변수함수의 최대·최소값

예제 2.1

생략.

예제 2.2

생략.

예제 2.3

(i) 임계점: $(0, 0)$

(ii) 안장점: $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$

예제 2.4

(i) 극솟값: $f(1, 1) = -1 = f(-1, -1)$

(ii) 안장점: $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 1)$

예제 2.5

①

예제 2.6

④

예제 2.7

④

예제 2.8

③

예제 2.9

④

예제 2.10

(i) 최댓값: $f(3, 0) = 9$

(ii) 최솟값: $f(0, 0) = 0 = f(2, 2)$

예제 2.11

③

예제 2.12

④

예제 2.13

②

예제 2.14

③

예제 2.15

④

예제 2.16

④

예제 2.17

④

6.3 라그랑주 승수**예제 3.1** $(0, \pm 3, 0)$ **예제 3.2**

생략.

예제 3.3

- 최댓값: $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- 최솟값: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

예제 3.4

- 최댓값: $\frac{1}{27}$
- 최솟값: 0

예제 3.5

- 최댓값: $2\sqrt{6}$
- 최솟값: $-2\sqrt{6}$

예제 3.6 $\sqrt{56}$ **예제 3.7** $2e^{-4}$ **예제 3.8**

$$x = \frac{\alpha d}{a}, \quad y = \frac{\beta d}{b}, \quad z = \frac{\gamma d}{c}$$

예제 3.9

생략.

예제 3.10

③

예제 3.11

4

예제 3.12

202

예제 3.13

②

예제 3.14

②

예제 3.15

③

예제 3.16

①

예제 3.17

③

종합 6.1

④

종합 6.2

③

종합 6.3

④

종합 6.4

④

종합 6.5

10

종합 6.6

③

종합 6.7

④

종합 6.8 $\frac{5}{3}$ **종합 6.9**

④

종합 6.10

③

종합 6.11

②

종합 6.12

③

종합 6.13

③

종합 6.14

①

종합 6.15 $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ **종합 6.16**

$$-\frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$$

종합 6.17

①

종합 6.18

①

종합 6.19

⑤

종합 6.20

(a) 접평면:

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(z+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\right)=0$$

$$(b) -\frac{\sqrt{2}}{6}\pi-\frac{7\sqrt{2}}{480}\pi^2$$

$$(c) -4\sqrt{2}$$

종합 6.21

③

종합 6.22

②

종합 6.23

②

종합 6.24

③

종합 6.25

②

종합 6.26

④

종합 6.27

②

종합 6.28

①

종합 6.29

1

종합 6.30

③

종합 6.31

66

종합 6.32

③

종합 6.33

②

종합 6.34

④

종합 6.35

②

종합 6.36

④

종합 6.37

a

종합 6.38

⑤

종합 6.39

④

종합 6.40

②

종합 6.41

②

종합 6.42

③

종합 6.43

①

종합 6.44

④

종합 6.45

④

종합 6.46

⑤

종합 6.47

④

종합 6.48

④

종합 6.49

②

종합 6.50

③

종합 6.51

①

종합 6.52

①

종합 6.53

⑤

종합 6.54

- 최댓값: $\frac{17}{8}$
- 최솟값: 0

종합 6.55

③

종합 6.56

- 4

종합 6.57

④

종합 6.58

①

종합 6.59

④

종합 6.60

④

종합 6.61

④

종합 6.62

⑤

종합 6.63

④

종합 6.64

①

종합 6.65

③

종합 6.66

④

종합 6.67

- (1) ④
(2) ③
(3) ④

종합 6.68

a

종합 6.69

e

종합 6.70

③

종합 6.71

⑤

종합 6.72

③

종합 6.73

④

종합 6.74

- 최댓값: $2\sqrt{6}$
- 최솟값: $-2\sqrt{6}$

종합 6.75

- 가로: $20\sqrt{3} - 8$
- 세로: $20\sqrt{3} - 8$

종합 6.76

①

종합 6.77

②

종합 6.78

⑤

종합 6.79

- 최댓값: $\frac{4}{3}$
- 최솟값: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

종합 6.80

④

종합 6.81

④

종합 6.82

①

종합 6.83

①

종합 6.84

③

종합 6.85

⑤

종합 6.86

②

종합 6.87

③

종합 6.88

- (1) • 임계점: $(0, 0), (1, 1)$
- 안장점: $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$
 - 극소점: $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, -1)$
- (2) • 최댓값: 3
- 최솟값: $-\frac{3(\sqrt{6} + 3)}{2}$

종합 6.89

②

종합 6.90

①

종합 6.91

②

종합 6.92

①

종합 6.93

②

종합 6.94

②

종합 6.95

③

종합 6.96

③

종합 6.97

①

종합 6.98

②

종합 6.99

⑤

종합 6.100

㉠

종합 6.101

②

종합 6.102

96

종합 6.103

②

종합 6.104

②

종합 6.105

⑤

07다변수 함수의 이중적분 (Double Integration)

7.1이중적분의 개념 및 정의

예제 1.1

34

예제 1.2

2π

예제 1.3

18

예제 1.4

불가능.

7.2이중적분의 계산: 반복적분

예제 2.1

- 12

예제 2.2

0

예제 2.3

1

예제 2.4

(1) 0

(2) $4\pi^2$

예제 2.5

$$(i) \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx = \frac{1}{2}$$

$$(ii) \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy = -\frac{1}{2}$$

7.3일반영역에서의 이중적분

예제 3.1

$$\frac{32}{5}$$

예제 3.2

$$\frac{216}{35}$$

예제 3.3

36

예제 3.4

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$$

예제 3.5

②

예제 3.6

⑥

예제 3.7

①

예제 3.8

②

예제 3.9

④

예제 3.10

②

예제 3.11

③

예제 3.12

④

예제 3.13

②

예제 3.14

②

7.4 극좌표상에서의 이중적분**예제 4.1**

$$(1) D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{1}{2} \sec \theta \leq r \leq \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$(2) D = \left\{ (r, \theta) \mid \sec \theta \leq r \leq 2 \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$(3) D = \left\{ (r, \theta) \mid \csc \theta \leq r \leq 2 \csc \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

예제 4.2

$$\frac{15}{2} \pi$$

예제 4.3

$$\frac{\pi}{2}$$

예제 4.4

$$\frac{\pi}{8}$$

예제 4.5

$$\frac{3}{2} \pi$$

예제 4.6

$$\sqrt{\pi}$$

예제 4.7

④

예제 4.8

②

예제 4.9

$$① \int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} y e^x dy dx = 4e^5 - \frac{23}{2}$$

$$② \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 r^2 \sin \theta e^{r \cos \theta} dr d\theta = 4e^5 - \frac{23}{2}$$

예제 4.10

④

예제 4.11

②

예제 4.12

③

예제 4.13

①

종합 7.1

④

종합 7.2

⑤

종합 7.3

③

종합 7.4

②

종합 7.5

⑤

종합 7.6

③

종합 7.7

②

종합 7.8

②

종합 7.9

④

종합 7.10

①

종합 7.11

②

종합 7.12

②

종합 7.13

②

종합 7.14

③

종합 7.15

②

종합 7.16

①

종합 7.17

④

종합 7.18

⑤

종합 7.19

$$\frac{1}{2}$$

종합 7.20

④

종합 7.21

①

종합 7.22

③

종합 7.23

②

종합 7.24

②

종합 7.25

②

종합 7.26

④

종합 7.27

①

종합 7.28

①

종합 7.29

①

종합 7.30

④

종합 7.31

③

종합 7.32

⑤

종합 7.33

②

종합 7.34

②

종합 7.35

㉠

종합 7.36

①

종합 7.37

⑤

종합 7.38

①

종합 7.39

②

종합 7.40

①

종합 7.41

④

종합 7.42

$\frac{\pi}{16}$

종합 7.43

③

종합 7.44

①

종합 7.45

③

종합 7.46

③

종합 7.47

④

종합 7.48

②

종합 7.49

$\frac{\pi}{6}(1 - e^{-4})$

종합 7.50

②

종합 7.51

④

종합 7.52

①

종합 7.53

④

종합 7.54

①

종합 7.55

④

종합 7.56

④

종합 7.57

④

종합 7.58

①

종합 7.59

③

종합 7.60

②

종합 7.61

①

08이중적분의 응용(Applications of Double Integration)

8.1 질량, 무게중심 및 관성모멘트

예제 1.1

(1) $\frac{768}{5}$

(2) $\left(\frac{80}{13}, \frac{20}{9}\right)$

예제 1.2

$$\frac{5}{24}$$

예제 1.3

①

예제 1.4

$$\left(\frac{3a}{2\pi}, \frac{3a}{2\pi}\right)$$

예제 1.5

(i) 면적중심 : $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(ii) 무게중심 : $\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{14}\right)$

(iii) $I_x = 12, I_y = \frac{39}{5}, I_0 = \frac{99}{5}$

8.2 곡면의 면적

예제 2.1

$$\frac{1}{12}(27 - 5\sqrt{5})$$

예제 2.2

$$\frac{2}{3}\pi$$

예제 2.3

$$\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$$

예제 2.4

③

예제 2.5

④

예제 2.6

①

예제 2.7

④

8.3 이중적분의 변수변환

예제 3.1

2

예제 3.2

$$\frac{3}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

예제 3.3

①

예제 3.4

③

예제 3.5

②

예제 3.6

④

예제 3.7

③

예제 3.8

①

예제 3.9

④

예제 3.10

④

종합 8.1

④

종합 8.2

①

종합 8.3

③

종합 8.4

④

종합 8.5

①

종합 8.6 $a = 20$ **종합 8.7**

②

종합 8.8

②

종합 8.9

①b

종합 8.10

④

종합 8.11

①

종합 8.12

⑤

종합 8.13

②

종합 8.14

(a)
$$\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}} dA = \int_0^1 \int_u^1 2e^{\frac{u}{v}} dv du$$

(b) $e - 1$ **종합 8.15**

(a) $\frac{1}{4}$

(b) $S = \{(u, v) \mid -4 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 8\}$

(c) 192

종합 8.16

①

종합 8.17

④

종합 8.18

⑤

종합 8.19

②

종합 8.20

⑤

종합 8.21

⑤

종합 8.22

④

종합 8.23

②

종합 8.24

$$\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

종합 8.25

②

종합 8.26

①

종합 8.27

④

종합 8.28

②

종합 8.29

②

종합 8.30

①

종합 8.31

11

종합 8.32

①

종합 8.33

②

종합 8.34

②

종합 8.35

③

종합 8.36

①

종합 8.37

④

종합 8.38

③

종합 8.39

④

종합 8.40

①

종합 8.41

①

종합 8.42

①

종합 8.43

④

09다변수 스칼라함수의 삼중적분 (Triple Integration)

9.1삼중적분의 개념 및 정의

예제 1.1

$$\frac{27}{4}$$

예제 1.2

$$-14$$

예제 1.3

$$\frac{1}{24}$$

예제 1.4

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y-x} f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-y-x} f(x, y, z) dx dz dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-z-y} f(x, y, z) dx dz dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-z-x} f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-x} f(x, y, z) dy dx dz \end{aligned}$$

예제 1.5

①

예제 1.6

④

예제 1.7

$$\frac{128}{15}\pi$$

예제 1.8

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+z^2}^4 f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{x^2+z^2}^4 f(x, y, z) dy dx dz \\ &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} f(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{z^2}^4 \int_{-\sqrt{y-z^2}}^{\sqrt{y-z^2}} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_{-\sqrt{y-z^2}}^{\sqrt{y-z^2}} f(x, y, z) dx dz dy \end{aligned}$$

예제 1.9

$$\frac{4}{3}$$

예제 1.10

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_0^2 \int_y^2 \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} f(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} \int_0^x f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} \int_0^x f(x, y, z) dy dx dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-\frac{1}{2}y^2} \int_0^{\sqrt{4-2z}} f(x, y, z) dx dz dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} \int_0^{\sqrt{4-2z}} f(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

예제 1.11

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \int_0^y f(x, y, z) dz dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z) dx dz dy \\
&= \int_0^1 \int_z^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_z^{x^2} f(x, y, z) dy dz dx \\
&= \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_z^{x^2} f(x, y, z) dy dz x dx
\end{aligned}$$

예제 1.12

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dz dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) dy dz dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) dy dx dz
\end{aligned}$$

예제 1.13

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy dx dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x^2} f(x, y, z) dz dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} f(x, y, z) dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-z}} \int_0^{\sqrt{1-z}} f(x, y, z) dx dy dz \\
&\quad + \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-z}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{2y-y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx dz dy \\
&\quad + \int_0^1 \int_{2y-y^2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} f(x, y, z) dx dz dy
\end{aligned}$$

예제 1.14

②

9.2 삼중적분의 응용

예제 2.1

$$\int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} \int_0^{2-x-2y} dz dy dx = \frac{1}{3}$$

예제 2.2

6

예제 2.3

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_y^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x dy dx dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^x dy dx dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_y^{\sqrt{1-z^2}} dx dz dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_y^{\sqrt{1-z^2}} dx dy dz
\end{aligned}$$

예제 2.4

$$8\sqrt{2}\pi$$

예제 2.5

⑤

예제 2.6

②

예제 2.7

$$\left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14} \right)$$

예제 2.8

(i) 질량 : $\frac{4}{3}k$ (k : 비례상수)

(ii) 무게중심 : $\left(\frac{32}{35}, \frac{16}{35}, 1\right)$

9.3원기등좌표와 삼중적분

예제 3.1

- (1) $(-1, \sqrt{3}, 1)$
 (2) $\left(3\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi, -7\right) = \left(3\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}, -7\right) = \dots$

예제 3.2

- (1) $z^2 = x^2 + y^2$
 (2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$

예제 3.3

- (1) $z = 4 - r^2$
 (2) $r = 2\cos\theta$

예제 3.4

- (1) $\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$
 (2) $\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1 - r\}$
 (3) $\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$
 (4) $\left\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 4 - r^2\right\}$
 (5) $\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{2-r^2} \leq z \leq \sqrt{2-r^2}\}$
 (6) $\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2\}$
 (7) $\{(r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{2-r^2} \leq z \leq \sqrt{2-r^2}\}$

예제 3.5

$\frac{12\pi}{5}k$ (k : 비례상수)

예제 3.6

$\frac{5}{2}\pi$

예제 3.7

$\frac{16}{5}\pi$

예제 3.8

①

9.4구면좌표와 삼중적분

예제 4.1

- (1) $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right)$
 (2) $\left(4, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$

예제 4.2

- (1) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$
 (2) $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$
 (3) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 + y^2) = 2xy$
 (4) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$

예제 4.3

- (1) $\rho = \csc\phi \cot\phi = \cos\phi \csc^2\phi$
 (2) $\rho^2(\sin^2\phi \cos^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

예제 4.4

- (1) $\{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$
 (2) $\left\{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq \cos\phi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\right\}$
 (3) $\{(\rho, \theta, \phi) \mid 2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$

예제 4.5

$\frac{4}{3}(e - 1)\pi$

예제 4.6

$\frac{\pi}{8}$

예제 4.7

2π

예제 4.8

④

예제 4.9

②

9.5삼중적분과 변수변환**예제 5.1**

8π

예제 5.2

①

예제 5.3

$\frac{4}{3}\pi abc$

예제 5.4

$2\pi^2 a^2 b$

종합 9.1

①

종합 9.2

②

종합 9.3

④

종합 9.4

①

종합 9.5

⑤

종합 9.6

$$\iiint_E \cos(y^2) dV = \int_0^1 \sin(9t^2) dt$$

종합 9.7

⑤

종합 9.8

④

종합 9.9

④

종합 9.10

$\frac{2}{15}$

종합 9.11

①

종합 9.12

④

종합 9.13

④

종합 9.14

③

종합 9.15

④

종합 9.16

a

종합 9.17

③

종합 9.18

②

종합 9.19

③

종합 9.20

④

종합 9.21

④

종합 9.22

③

종합 9.23

②

종합 9.24

④

종합 9.25

③

종합 9.26

④

종합 9.27

(a) $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(b)

(i) a 의 범위: $a \geq \sqrt{2}$ (ii) 보이는 부분의 겹넓이: $2\pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ **종합 9.28**

④

종합 9.29

④

종합 9.30

③

종합 9.31

②

종합 9.32

④

종합 9.33

③

종합 9.34

④

종합 9.35

②

종합 9.36

④

종합 9.37

②

종합 9.38

②

종합 9.39

⑤

종합 9.40

③

종합 9.41

②

종합 9.42

④

10선적분(Line Integral)

10.1벡터장

예제 1.1

생략.

예제 1.2

생략.

예제 1.3

$$(1) \nabla f(\mathbf{x}) = \langle 2xy, x^2 - 3y^2 \rangle$$

$$(2) \nabla f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \langle x, y, z \rangle$$

$$(3) \nabla f(\mathbf{x}) = -\frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \langle x, y, z \rangle$$

예제 1.4

②

10.2스칼라함수의 선적분

예제 2.1

$$2\pi + \frac{2}{3}$$

예제 2.2

$$\frac{11 + 5\sqrt{5}}{6}$$

예제 2.3

$$\sqrt{2}\pi$$

예제 2.4

①

예제 2.5

①

예제 2.6

①

예제 2.7

생략.

10.3벡터함수의 선적분

예제 3.1

$$\frac{19}{2}$$

예제 3.2

$$-\frac{2}{3}$$

예제 3.3

$$\frac{27}{28}$$

예제 3.4

③

예제 3.5

②

예제 3.6

$$(1) -\frac{5}{6}$$

$$(2) 40 + \frac{5}{6} = \frac{245}{6}$$

예제 3.7

①

예제 3.8

①

예제 3.9

(i) $\int_{C_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$

(ii) $\int_{C_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} < 0$

예제 3.10

$3\pi + \frac{2}{3}$

예제 3.11

0

예제 3.12

생략.

예제 3.13

생략.

예제 3.14

생략.

예제 3.15

생략.

10.4 선적분의 기본정리**예제 4.1**

생략.

예제 4.2

생략.

예제 4.3

$$GMm \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{13} \right)$$

예제 4.4

40

예제 4.5

(1) 보존적이 아님.

(2) $f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + k$

(3) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + k$

(4) $f(x, y) = e^x \sin y + k$

(5) $f(x, y) = ye^x + x \sin y + k$

(6) $f(x, y) = xe^{xy} + k$

(7) $f(x, y, z) = xy^y + ye^{3z} + k$

(8) $f(x, y, z) = xyz + z^2 + k$

예제 4.6

벡터장 \mathbb{F} 가 보존적(conservative)이고 세 곡선의 시점과 종점이 같기 때문에 $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ 의 값은 16으로 모두 같다.

예제 4.7

생략.

예제 4.8

④

예제 4.9

③

예제 4.10

④

예제 4.11

②

예제 4.12

①

예제 4.13

π

예제 4.14

②

예제 4.15

④ 2π

10.5그린정리

예제 5.1

$$\frac{1}{6}$$

예제 5.2

$$36\pi$$

예제 5.3

$$ab\pi$$

예제 5.4

생략.

예제 5.5

$$\frac{14}{3}$$

예제 5.6

생략.

예제 5.7

②

예제 5.8

②

예제 5.9

③

예제 5.10

②

예제 5.11

③

예제 5.12

③

예제 5.13

$$\frac{1}{3}$$

예제 5.14

$$\frac{7}{10}$$

예제 5.15

③

예제 5.16

③

종합 10.1

②

종합 10.2

③

종합 10.3

②

종합 10.4

④

종합 10.5

②

종합 10.6

⑤

종합 10.7

①

종합 10.8

②

종합 10.9

④

종합 10.10

④

종합 10.11

④

종합 10.12

③

종합 10.13

④

종합 10.14

①

종합 10.15

⑤

종합 10.16

③

종합 10.17

(a) 생략.

(b) 2

종합 10.18

②

종합 10.19

①

종합 10.20

②

종합 10.21

④

종합 10.22

⑤

종합 10.23

①

종합 10.24

②

종합 10.25

생략.

종합 10.26

③

종합 10.27

④

종합 10.28

8

종합 10.29

③

종합 10.30

③

종합 10.31

⑤

종합 10.32

②

종합 10.33

①

종합 10.34

②

종합 10.35

12

종합 10.36

④

종합 10.37

④

종합 10.38

②

종합 10.39

(a) 생략.

(b) 2π

종합 10.40

①

종합 10.41

⑤

종합 10.42

③

종합 10.43

①

종합 10.44

④

종합 10.45

④

종합 10.46

④

종합 10.47

②

종합 10.48

⑤

종합 10.49

④

종합 10.50

③

종합 10.51

종합 10.51

①

종합 10.52

①

종합 10.53

①

종합 10.54

②

종합 10.55

①

종합 10.56

③

종합 10.57

③

종합 10.58

①

종합 10.59

㉠

종합 10.60

③

종합 10.61

①

종합 10.62

(1) $-\frac{\pi}{2}$

(2) 2π

(3) $\frac{3\pi}{2}$

종합 10.63

②

종합 10.64

(1) ⑤

(2) ①

(3) ③

종합 10.65

③

11다변수 벡터함수-곡면적분 (Surface Integral)

11.1회전연산자와 발산연산자

예제 1.1

생략.

예제 1.2

생략.

예제 1.3

- (1) $\nabla \times \mathbb{F} = \langle -2y - xy, x, yz \rangle$
 (2) 보존적이 아니다.

예제 1.4

- (1) $\nabla \times \mathbb{F} = \vec{0}$
 (2) $f(x, y, z) = xy^2z^3 + k$

예제 1.5

생략.

예제 1.6

생략.

예제 1.7

- (1) (i) $\nabla \times \mathbb{F} = \langle -x^2, 3xy, -xz \rangle$
 (ii) $\nabla \cdot \mathbb{F} = yz$
 (2) (i) $\nabla \times \mathbb{F} = \langle x(z^2 - y^2), y(x^2 - z^2), z(y^2 - x^2) \rangle$
 (ii) $\nabla \cdot \mathbb{F} = 6xyz$
 (3) (i) $\nabla \times \mathbb{F} = \langle ze^x, xye^z - yze^x, -xe^z \rangle$
 (ii) $\nabla \cdot \mathbb{F} = y(e^z + e^x)$
 (4) (i) $\nabla \times \mathbb{F} = \langle -2y - xy, x, yz \rangle$
 (ii) $\nabla \cdot \mathbb{F} = z + xz$
 (5)
 (i) $\nabla \times \mathbb{F} = \left\langle \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - e^{xy}\cos z, -\frac{yz}{x^2 + z^2}, ye^{xy}\sin z \right\rangle$
 (ii) $\nabla \cdot \mathbb{F} = xe^{xy}\sin z - \frac{xy}{x^2 + z^2}$

(6) (i) $\nabla \times \mathbb{F} = \vec{0}$

(ii) $\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

예제 1.8

- (1) $f(x, y, z) = xy^2z^3 + k$
 (2) $f(x, y, z) = xe^{yz} + k$

11.2스칼라함수의 곡면적분

예제 2.1

$x^2 + z^2 = 4$

예제 2.2

$\vec{r}(\phi, \theta) = \langle r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi \rangle$
 ($0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$)

예제 2.3

$x = 3\cos \theta, y = 3\sin \theta, z = z$
 ($0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1$)

예제 2.4

$\vec{r}(x, y) = \langle x, y, x^2 + 2y^2 \rangle, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

예제 2.5

$\vec{r}(x, y) = \langle x, y, 2\sqrt{x^2 + y^2} \rangle, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

예제 2.6

$\vec{r}(x, \theta) = \langle x, \sin x \cos \theta, \sin x \sin \theta \rangle,$
 $\forall (x, \theta) \in D = \{(x, \theta) \mid 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

예제 2.7

$x + 2y - 2z = -3$

예제 2.8

$4\pi r^2$

예제 2.9

$$\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$$

예제 2.10

④

예제 2.11

①

예제 2.12

④

예제 2.13

③

예제 2.14

①

예제 2.15

②

예제 2.16

$$\frac{4}{3}\pi$$

예제 2.17

$$\frac{13\sqrt{2}}{3}$$

예제 2.18

$$\left(0, 0, \frac{1}{2}r\right)$$

예제 2.19

$$\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$$

11.3 벡터함수의 곡면적분**예제 3.1**

$$\vec{r}(\phi, \theta) = \langle r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi \rangle$$

$$(0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta}{\|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta\|}$$

$$= \langle \sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \langle x, y, z \rangle$$

예제 3.2

$$\frac{4}{3}\pi$$

예제 3.3

$$\frac{\pi}{2}$$

11.4 스톡스정리**예제 4.1**

$$\pi$$

예제 4.2

$$0$$

예제 4.3

$$-2\pi$$

예제 4.4

$$4$$

예제 4.5

③

예제 4.6

$$-18\pi$$

예제 4.7

①

11.5가우스 발산정리

예제 5.1

$$\frac{4}{3}\pi$$

예제 5.2

$$\frac{184}{35}$$

예제 5.3

$$4\pi$$

예제 5.4

$$4\pi$$

예제 5.5

$$4\pi cK$$

예제 5.6

③

예제 5.7

$$4\pi$$

예제 5.8

①

예제 5.9

③

예제 5.10

$$\frac{\pi}{2}$$

예제 5.11

②

예제 5.12

①

예제 5.13

①

예제 5.14

①

종합 11.1

③

종합 11.2

③

종합 11.3

⑤

종합 11.4

④

종합 11.5

②

종합 11.6

①

종합 11.7

③

종합 11.8

③

종합 11.9

④

종합 11.10

②

종합 11.11

④

종합 11.12

④

종합 11.13

④

종합 11.14

③

종합 11.15

㉡

종합 11.16

76

종합 11.17

④

종합 11.18

④

종합 11.19

13

종합 11.20

①

종합 11.21

①

종합 11.22

②

종합 11.23

③

종합 11.24

②

종합 11.25

④

종합 11.26

③

종합 11.27

⑤

종합 11.28

④

종합 11.29

①

종합 11.30

③

종합 11.31

④

종합 11.32

㉡

종합 11.33

②

종합 11.34

②

종합 11.35

④

종합 11.36

③

종합 11.37

③

종합 11.38

④

종합 11.39

⑤

종합 11.40

③

종합 11.41

③

종합 11.42

(a) 생략.

(b) 0

종합 11.43

④

종합 11.44

④

종합 11.45

④

종합 11.46

③

종합 11.47

0

종합 11.48

④

종합 11.49

①

종합 11.50

④

종합 11.51

③

종합 11.52

④

종합 11.53

③

종합 11.54

③

종합 11.55

②

종합 11.56

e

종합 11.57

③

종합 11.58

①