

# 정답 및 풀이



A n s w e r & S o l u t i o n

# 01벡터(Vectors)

## 1.1직교좌표계와 벡터

### 예제 1.1

생략(←강의에서 설명)

### 예제 1.2

- (1)  $|\vec{u}| = 5$
- (2)  $\vec{u} + \vec{v} = \langle 2, 1, 8 \rangle$
- (3)  $\vec{u} - \vec{v} = \langle 6, -1, -2 \rangle$
- (4)  $3\vec{v} = \langle -6, 3, 15 \rangle$
- (5)  $2\vec{u} + 5\vec{v} = \langle -2, 5, 31 \rangle$

### 예제 1.3

$$\langle 14, 4, 15 \rangle = 14\vec{i} + 4\vec{j} + 15\vec{k}$$

### 예제 1.4

$$\pm \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right\rangle$$

## 1.2벡터의 내적과 정사영

### 예제 2.1

생략(←강의에서 설명)

### 예제 2.2

생략(←강의에서 설명)

### 예제 2.3

생략

### 예제 2.4

생략

### 예제 2.5

생략

### 예제 2.6

- (1) 6
- (2) 7

### 예제 2.7

$$\frac{\pi}{4}$$

### 예제 2.8

$$\frac{\pi}{3}$$

### 예제 2.9

$$\frac{\pi}{3}$$

### 예제 2.10

$$\frac{\pi}{3}$$

### 예제 2.11

①

### 예제 2.12

0

### 예제 2.13

- 17

### 예제 2.14

2

### 예제 2.15

- (i) 스칼라 사영 :  $\text{comp}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{3}{\sqrt{14}}$
- (ii) 벡터 사영 :  $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14} \right\rangle$

### 예제 2.16

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**예제 2.17**

$$\frac{5}{3}$$

**예제 2.18**

④

**예제 2.19**

$36J$ (줄)

**예제 2.20**

③

### 1.3벡터의 외적

**예제 3.1**

생략

**예제 3.2**

생략

**예제 3.3**

생략

**예제 3.4**

$\langle 4, 6, 7 \rangle$

**예제 3.5**

$\langle -43, 13, 1 \rangle$

**예제 3.6**

③

**예제 3.7**

$$\vec{a} \times 5\vec{b} = 5\vec{a} \times \vec{b}$$

**예제 3.8**

- 3

**예제 3.9**

④

**예제 3.10**

②

**예제 3.11**

②

**예제 3.12**

①

**예제 3.13**

④

**예제 3.14**

③

**예제 3.15**

②

**예제 3.16**

$$\sqrt{3}$$

**예제 3.17**

③

**예제 3.18**

④

**예제 3.19**

③

**예제 3.20**

①

**예제 3.21**

④

**예제 3.22**

(3)

## 1.4 삼중곱

**예제 4.1**

생략.

**예제 4.2**

생략.

**예제 4.3**

생략.

**예제 4.4**

생략.

**예제 4.5**

(3)

**예제 4.6**

4

**예제 4.7**

(4)

**예제 4.8**

- 1

**예제 4.9**

(2)

**예제 4.10**

$\langle -2, 2, -2 \rangle$

**예제 4.11**

(2)

**예제 4.12**

(4)

**예제 4.13**

(4)

**예제 4.14**

(3)

**예제 4.15**

(2)

**예제 4.16**

(1)

**예제 4.17**

(3)

**종합 1.1**

(3)

**종합 1.2**

(2)

**종합 1.3**

(3)

**종합 1.4**

(1)

**종합 1.5**

(5)

**종합 1.6**

(2)

**종합 1.7**

(3)

**종합 1.8**

(3)

**종합 1.9**

(2)

**종합 1.10**

(2)

**종합 1.11**

(2)

**종합 1.12**

(3)

**종합 1.13**

(3)

**종합 1.14**

(2)

**종합 1.15**

(2)

**종합 1.16**

(2)

**종합 1.17**

(3)

**종합 1.18**

(3)

**종합 1.19**

(1)

**종합 1.20**

(3)

**종합 1.21**

2

**종합 1.22**

(4)

**종합 1.23**

(1)

**종합 1.24**

(d)

**종합 1.25**

(4)

**종합 1.26**

(4)

## 02직선과 평면의 방정식 (Equations of line & plane)

### 예제 2.4

①

### 예제 2.5

②

### 2.1직선의 방정식

#### 예제 1.1

(i) 벡터방정식 :

$$\vec{r}(t) = \langle 5 + t, 1 + 4t, 3 - 2t \rangle$$

(ii) 매개방정식 :

$$x = 5 + t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 3 - 2t$$

### 예제 2.6

②

### 예제 2.7

③

### 예제 2.8

②

#### 예제 1.2

(i) 매개방정식 :

$$x = 2 + t, \quad y = 4 - 5t, \quad z = -3 + 4t$$

(ii) 대칭방정식 :

$$x - 2 = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}$$

$$(iii) \left( \frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right)$$

### 2.3직선과 평면의 위치관계

#### 예제 3.1

$$k = 16$$

#### 예제 1.3

생략.

#### 예제 3.2

④

#### 예제 3.3

③, ⑤

### 2.2평면의 방정식

#### 예제 2.1

(i) 평면의 방정식 :

$$2x + 3y + 4z = 12$$

(ii) 좌표축과 만나는 점 :

$$(6, 0, 0), \quad (0, 4, 0), \quad (0, 0, 3)$$

#### 예제 3.4

①

#### 예제 3.5

②

#### 예제 3.6

③

#### 예제 2.2

④

#### 예제 3.7

④

#### 예제 2.3

$$2x + 8y - 5z = -15$$

#### 예제 3.8

④

### 예제 3.9

①

### 예제 3.10

④

### 2.6 공간에서의 거리

#### 예제 6.1

(1) 생략.

(2)  $\sqrt{\frac{97}{3}}$

### 2.4 직선과 평면의 사잇각

#### 예제 4.1

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

#### 예제 4.2

⑤

#### 예제 4.3

②

#### 예제 4.4

②

### 2.5 교점과 교선

#### 예제 5.1

②

#### 예제 5.2

②

#### 예제 5.3

⑤

#### 예제 5.4

①

#### 예제 6.3

③

#### 예제 6.4

①

#### 예제 6.5

①

#### 예제 6.6

④

#### 예제 6.7

③

#### 예제 6.8

⑤

#### 예제 6.9

②

#### 예제 6.10

④

#### 종합 2.1

(3)

### 종합 2.2

(3)

### 종합 2.3

(4)

### 종합 2.4

(1)

### 종합 2.5

(3)

### 종합 2.6

(1)

### 종합 2.7

(3)

### 종합 2.8

(4)

### 종합 2.9

(4)

### 종합 2.10

(1)

### 종합 2.11

(4)

### 종합 2.12

(4)

### 종합 2.13

(4)

(3)

(4)

### 종합 2.15

(4)

### 종합 2.16

(2)

### 종합 2.17

(5)

### 종합 2.18

(2)

### 종합 2.19

(c)

### 종합 2.20

(4)

### 종합 2.21

(3)

### 종합 2.22

(3)

### 종합 2.23

(1)

### 종합 2.24

(2)

### 종합 2.25

(4)

### 종합 2.26

(2)

| 종합 2.27

①

| 종합 2.28

①

## 03일변수 벡터함수 (Vector-valued function)

### 3.1일변수 벡터함수의 극한과 연속

#### 예제 1.1

$$Dom(\mathbf{r}(t)) = [0, 3]$$

#### 예제 1.2

생략.

#### 예제 1.3

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \langle 1+t, 3-4t, -2+5t \rangle, 0 \leq t \leq 1$$

#### 예제 1.4

생략.

#### 예제 1.5

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \langle \cos t, \sin t, 2 - \sin t \rangle, 0 \leq t \leq 2\pi$$

#### 예제 1.6

$$(i) Dom(\mathbf{r}(t)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) = \langle 1, 0, 1 \rangle$$

#### 예제 1.7

(i)  $\mathbb{R} - \{0\}$ 에서 연속.

(ii)  $\vec{\mathbf{r}}(0) = \langle 0, -1, 1 \rangle$ 로 정의하면  $\mathbb{R}$  전체에서 연속.

### 3.2일변수 벡터함수의 미분

#### 예제 2.1

생략.

#### 예제 2.2

$$(1) \langle 3t^2, (1-t)e^{-t}, 2\cos(2t) \rangle$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 1, 0, 2 \rangle$$

#### 예제 2.3

$$(i) \mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{1}{2\sqrt{t}}, -1 \right\rangle$$

$$(ii) \mathbf{r}(1) = \langle 1, 1 \rangle \text{ & } \mathbf{r}'(1) = \left\langle \frac{1}{2}, -1 \right\rangle$$

#### 예제 2.4

$$x = -2t, y = 1, z = \frac{\pi}{2} + t, t \in \mathbb{R}$$

#### 예제 2.5

생략.

#### 예제 2.6

생략.

#### 예제 2.7

생략.

### 3.3일변수 벡터함수의 적분과 호의 길이

#### 예제 3.1

$$(1) \int \mathbf{r}(t) dt = \langle 2\sin t, -\cos t, t^2 \rangle + \vec{\mathbf{c}}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{r}(t) dt = \left\langle 2, 1, \frac{\pi^2}{4} \right\rangle$$

#### 예제 3.2

$$(1) \int_0^1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)(t) dt = \frac{4}{3}$$

$$(2) \int_0^1 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)(t) dt = \left\langle -\frac{7}{6}, \frac{13}{20}, -\frac{4}{5} \right\rangle$$

#### 예제 3.3

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, t^3, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \right\rangle$$

#### 예제 3.4

$$2\sqrt{2}\pi$$

### 예제 3.5

$$\mathbf{r}(t(s)) = \left\langle \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

### 예제 3.6

④

### 예제 3.7

①

## 3.4 곡률

### 예제 4.1

생략.

### 예제 4.2

생략.

### 예제 4.3

$$(i) \kappa(t) = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}$$

$$(ii) \kappa(0) = 2$$

### 예제 4.4

$$\kappa(0) = 2, \kappa(1) = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \kappa(2) = \frac{2}{17\sqrt{17}}$$

### 예제 4.5

$$(i) \vec{v} = \langle -1, -18, 2 \rangle$$

$$(ii) \vec{a} = \langle 6, -42, 2 \rangle$$

$$(iii) \vec{a}_T = \frac{754}{\sqrt{329}}, \vec{a}_N = \frac{50\sqrt{10}}{\sqrt{329}}$$

### 예제 4.6

$$(i) \vec{v}(t) = \langle -2\omega \sin(\omega t), 3\omega \cos(\omega t), -e^{-t} \rangle$$

$$(ii) \vec{a}(t) = \langle -2\omega^2 \cos(\omega t), -3\omega^2 \sin(\omega t), e^{-t} \rangle$$

$$(iii) \vec{a}_T(t) = \frac{-5\omega^3 \cos(\omega t) \sin(\omega t) - e^{-2t}}{\sqrt{4\omega^2 + 5\omega^2 \cos^2(\omega t) + e^{-2t}}} \\ \vec{a}_N(t) = \sqrt{\|\vec{a}(t)\|^2 - |\vec{a}_T(t)|^2}$$

### 예제 4.7

④

### 예제 4.8

$$(i) \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle 1, 2, 1 \rangle$$

$$(ii) \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -1, 0, 1 \rangle$$

$$(iii) \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1, -1, 1 \rangle$$

$$(iv) \mathbf{a}_T = \sqrt{6}, \mathbf{a}_N = \sqrt{2}$$

$$(v) \kappa = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

### 예제 4.9

$$(i) \vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle -1, 0, \sqrt{2} \rangle$$

$$(ii) \vec{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 0, -1, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$$

$$(iii) \vec{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\rangle$$

$$(iv) \vec{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3\sqrt{10}} \langle -2, -6, 5\sqrt{2} \rangle$$

$$(v) \vec{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{6} \langle 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 \rangle$$

$$(vi) \vec{a}_T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \vec{a}_N\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{11}{3\sqrt{10}}$$

$$(vii) \vec{\kappa}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{18} \langle -2, -6, 5\sqrt{2} \rangle$$

### 종합 3.1

③

### 종합 3.2

①

**종합 3.3**

①

③

**종합 3.4**

⑤

**종합 3.16**

①

**종합 3.5**

③

**종합 3.17**

③

**종합 3.6**

$$f(s) = \left( \frac{1-e^{2s}}{1+e^{2s}}, \frac{2e^s}{1+e^{2s}}, \ln\left(\frac{2e^s}{1+e^{2s}}\right) \right), \quad 0 \leq s < \infty$$

**종합 3.18**

③

**종합 3.7**

①

**종합 3.20**

(a)

- $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{3} \langle -2\sin t, 2\cos t, \sqrt{5} \rangle$
- $\mathbf{N}(t) = -\langle \cos t, \sin t, 0 \rangle$
- $\mathbf{B}(t) = \left\langle -\frac{\sqrt{5}}{3} \sin t, -\frac{\sqrt{5}}{3} \cos t, \frac{2}{3} \right\rangle$

$$(b) \sqrt{5}y - 2z = 0$$

**종합 3.8**

①

**종합 3.21**

④

**종합 3.9**

①

**종합 3.22**

⑤

**종합 3.10**

③

**종합 3.23**

접촉원:  $\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = 4^2$

**종합 3.11**

②

**종합 3.24**

④

**종합 3.12**

②

**종합 3.25**

①

**종합 3.13**

④

**종합 3.14**

③

**종합 3.24**

④

**종합 3.15**

①

**| 종합 3.26**

①

**| 종합 3.27**

③

**| 종합 3.28**

④

**| 종합 3.29**

②

**| 종합 3.30**

③

## 04다변수 스칼라함수 (Function of multi-variables)

### 4.1이차곡면

#### 예제 1.1

생략.

#### 예제 1.2

생략.

#### 예제 1.3

생략.

### 4.2다변수 스칼라함수의 개념 및 정의

#### 예제 2.1

$$(1) \{(x, y) \mid y \geq x^2\} - \{(0, 1)\}$$

$$(2) \{(x, y) \mid x < y^2\}$$

#### 예제 2.2

(i) 정의역 :  $\left\{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$

(ii) 치역 :  $[0, 2]$

#### 예제 2.3

(i)  $k = 1$  일 때,  $l_1(f) = \{(0, 0)\}$ .

(ii)  $k > 1$  일 때,

$$l_k(f) = \{(x, y) \in Dom(f) \mid 4x^2 + y^2 + 1 = k\}.$$

#### 예제 2.4

$$(1) \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$$

$$(2) \{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 > 1\}$$

### 4.3다변수 스칼라함수의 극한

#### 예제 3.1

- |            |            |
|------------|------------|
| (1) 수렴. 0  | (2) 발산     |
| (3) 발산     | (4) 발산     |
| (5) 수렴. 0  | (6) 수렴. 1  |
| (7) 수렴. 1  | (8) 발산.    |
| (9) 발산.    | (10) 발산.   |
| (11) 수렴. 1 | (12) 수렴. 0 |
| (13) 발산.   | (14) 발산.   |
| (15) 수렴. 0 | (16) 수렴. 0 |
| (17) 발산.   | (18) 수렴. 0 |
| (19) 발산.   | (20) 발산.   |
| (21) 발산.   | (22) 수렴. 0 |

#### 예제 3.2

⑤

#### 예제 3.3

ⓐ

#### 예제 3.4

ⓒ

#### 예제 3.5

①

### 4.4다변수 스칼라함수의 연속

#### 예제 4.1

- (1)  $\mathbb{R}^2$ 에서 연속.  
(2)  $\mathbb{R}^2$ 에서 연속.  
(3)  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 에서 연속.

#### 예제 4.2

②

#### 예제 4.3

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$$

**예제 4.4**

(4)

**종합 4.1**

생략.

**종합 4.2**

(2)

**종합 4.3**

(1)

**종합 4.4**

(1)

**종합 4.5**

(나), (다).

**종합 4.6**

$$A = -\frac{\pi}{2}, \quad B = \frac{\pi}{2}$$

**종합 4.7**

(2)

**종합 4.8**

(5)

## 05다변수 스칼라함수의 미분 (Differentiation)

### 5.1편도함수

#### 예제 1.1

- (i)  $f_x(2, -1) = 1$   
(ii)  $f_y(2, -1) = -2$

#### 예제 1.2

- (i)  $f_x\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = -1$   
(ii)  $f_y\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 0$

#### 예제 1.3

- (i)  $f_x(1, 0, 0) = 0$   
(ii)  $f_y(1, 0, 0) = 1$   
(iii)  $f_z(1, 0, 0) = -1$

#### 예제 1.4

- (1)  $f_x(x, y) = 3, f_y(x, y) = -8y^3$   
(2)  $f_x(x, y) = e^{3y}, f_y(x, y) = 3xe^{3y}$   
(3) (i)  $f_x(x, y) = 4046(2x + 3y)^{2022}$   
(ii)  $f_y(x, y) = 6069(2x + 3y)^{2022}$   
(4) (i)  $f_x(x, y) = \frac{2y}{(x+y)^2}$   
(ii)  $f_y(x, y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}$   
(5) (i)  $f_x(x, y) = \cos x \cos y$   
(ii)  $f_y(x, y) = -\sin x \sin y$   
(6) (i)  $f_x(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}$   
(ii)  $f_y(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

- (7) (i)  $f_x(x, y) = \left(1 - \frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}$   
(ii)  $f_y(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$

- (8) (i)  $f_x(x, y) = 2\sin(x - 3y)\cos(x - 3y)$   
(ii)  $f_y(x, y) = -6\sin(x - 3y)\cos(x - 3y)$   
(9) (i)  $f_x(x, y, z) = y \sin^{-1}(yz)$

$$(ii) f_y(x, y, z) = x \sin^{-1}(yz) + \frac{xyz}{\sqrt{1 - (yz)^2}}$$

$$(iii) f_z(x, y, z) = \frac{xy^2}{\sqrt{1 - (yz)^2}}$$

$$(10) (i) f_x(x, y, z) = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$(ii) f_y(x, y, z) = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$(iii) f_z(x, y, z) = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

#### 예제 1.5

- (1) (i)  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x - 3yz}{2z - 3xy}$   
(ii)  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y - 3xz}{2z - 3xy}$   
(2) (i)  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz - 4x^3z}{y}$   
(ii)  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz + z \ln z}{y}$

#### 예제 1.6

- (1)  $f_{xx} = 6x + 2y^3, f_{xy} = 6xy^2$   
 $f_{yx} = 6xy^2, f_{yy} = 6x^2y - 4$   
(2)  $f_{xx} = -y^2 \sin(xy), f_{yy} = -x^2 \sin(xy)$   
 $f_{xy} = \cos(xy) - xy \sin(xy) = f_{yx}$   
(3)  $f_{xx} = 2y - y \sin x, f_{yy} = -\cos y$   
 $f_{xy} = 2x + \cos x = f_{yx}$   
(4)  $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{(x+y)^2}$

#### 예제 1.7

$$x = 1, y = 2 + t, z = -4 - 8t \quad t \in \mathbb{R}$$

#### 예제 1.8

- (i) 매개방정식 :  $x = 1 + t, y = 2, z = 2 - 2t$

(ii) 대칭방정식 :  $x - 1 = \frac{z - 2}{-2}$ ,  $y = 2$

(ii)  $L(x, y) = 4x + 2y - 3$

### 예제 2.2

6.3

### 예제 1.9

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2 + c \quad (c : 상수)$$

### 예제 1.10

(1) 불연속

$$(2) f_x(0, 0) = 0 \text{ & } f_y(0, 0) = 0$$

### 예제 2.3

$$(i) L(x, y, z) = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z$$

$$(ii) \sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2} \\ \approx \frac{3}{7} \cdot (3.02) + \frac{2}{7} \cdot (1.97) + \frac{6}{7} \cdot (5.99)$$

### 예제 1.11

$$(1) f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$$

$$(2) f_{xy}(0, 0) = 0, f_{yx}(0, 0) = 1$$

### 예제 2.4

(1) 불연속

$$(2) f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$$

(3) 불연속

### 예제 1.12

$$(1) (i) f_x(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(ii) f_y(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(2) f_x(0, 0) = 0 \text{ & } f_y(0, 0) = 0$$

$$(3) f_{xy}(0, 0) = -1 \text{ & } f_{yx}(0, 0) = 1$$

## 5.3다변수 스칼라함수의 미분가능성

### 예제 3.1

생략.

### 예제 3.2

생략.

### 예제 3.3

$$(i) L(x, y) = x + y$$

$$(ii) f(1.1, -0.1) \approx L(1.1, -0.1) = 1$$

### 예제 3.4

$$(1) dz = \langle -2e^{-2x} \cos(2\pi t), -2\pi e^{-2x} \sin(2\pi t) \rangle \bullet \langle dx, dt \rangle$$

$$(2) du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \langle x, y \rangle \bullet \langle dx, dy \rangle$$

$$(3) dT = -\frac{1}{(1 + uvw)^2} \langle v^2 w, -1, uv^2 \rangle \bullet \langle du, dv, dw \rangle$$

$$(4) dL = e^{-y^2 - z^2} \langle z, -2xyz, x - 2xz^2 \rangle \bullet \langle dx, dy, dz \rangle$$

### 예제 1.15

③

## 5.2접평면과 선형근사

### 예제 2.1

$$(i) \pi : 4x + 2y - z = 3$$

### 예제 3.5

$$(i) \Delta z = f(1.05, 2.1) - f(1, 2) = 0.9225$$

$$(ii) dz = \nabla f(1, 2) \cdot \langle 0.05, 0.1 \rangle = 0.9$$

$$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = 2 \frac{\partial z}{\partial y} + 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4(r^2 + s^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial s} = 2 \frac{\partial z}{\partial y} + 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4(r^2 + s^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4rs \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 4s^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

**예제 3.6**

$20\pi cm^3$

**예제 3.7**

(d)

**예제 3.8**

(3)

**예제 3.9**

(4)

**예제 4.5**

(3)

**예제 4.6**

(3)

**예제 4.7**

(3)

**예제 4.8**

(4)

**예제 4.9**

(2)

**예제 4.10**

(5)

**예제 4.11**

(2)

**예제 4.12**

(3)

**예제 4.13**

(4)

**예제 4.14**

$$4u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4uv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial x}$$

**예제 4.3**

192

**예제 4.4**

$$(1) \bullet \frac{\partial z}{\partial r} = 2r \frac{\partial z}{\partial x} + 2s \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\bullet \frac{\partial z}{\partial s} = 2s \frac{\partial z}{\partial x} + 2r \frac{\partial z}{\partial y}$$

(2)

$$\bullet \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

**예제 4.15**

생략.

**예제 4.16**

$$(i) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\ln y}{y - 2z}$$

$$(ii) \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x + yz}{y^2 - 2yz}$$

**예제 4.17**

①

**예제 4.18**

③

**예제 4.19**

①

**예제 4.20**

②

**예제 4.21**

④

**예제 4.22**

③

**예제 4.23**

①

**5.5 테일러 전개와 정적분의 도함수****예제 5.1**

$$T_2(x, y) = x + 2y$$

**예제 5.2**

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2$$

**예제 5.3**

②

**예제 5.4**

$$T_2(f) = 1 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}(x-1) + \pi\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left\{ -\frac{\pi^2}{4}(x-1)^2 + \pi(x-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right\}$$

**예제 5.5**

$$\ln(1+s)$$

**예제 5.6**

$$\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\alpha)$$

**예제 5.7**

$$(1) \frac{1}{s}$$

$$(2) \ln 3$$

**예제 5.8**임의의  $\alpha > 0$ 에 대하여

$$\varphi(\alpha) := \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(\alpha x) - \tan^{-1}(x)}{x} dx \quad \dots \textcircled{1}$$

이라 하자. 이것을  $\alpha$ 에 대해서 미분하면

$$\varphi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(\alpha x) - \tan^{-1}(x)}{x} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\tan^{-1}(\alpha x) - \tan^{-1}(x)}{x} \right] dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1 + (\alpha x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \alpha [\tan^{-1}(\alpha x)]_{x=0}^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha}$$

이다. 즉,  $\varphi'(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\alpha}$ 이고, 이것을  $\alpha$ 에 대해서 적분하면

$$\varphi(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln \alpha + C \quad \dots \textcircled{2}$$

을 얻을 수 있다. 또한 식 ①에  $\alpha = 1$  을 대입하면

$$\varphi(1) = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(1)}{x} dx = 0$$

이고 식 ②에서

$$0 = \varphi(1) = \frac{\pi}{2} \ln(1) + C \Rightarrow C = 0$$

을 얻는다. 따라서  $\varphi(\alpha) = \frac{\pi}{2} \ln \alpha$  이고, 여기에

$\alpha = \pi$  를 대입하면

$$\frac{\pi}{2} \ln(\pi) = \varphi(\pi) = \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(\pi x) - \tan^{-1}(1)}{x} dx$$

이다. 즉,

$$\therefore \int_0^\infty \frac{\tan^{-1}(\pi x) - \tan^{-1}(1)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln(\pi)$$

이다. ■

### 예제 5.9

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{25}{4}}$$

### 종합 5.7

아니오.

### 종합 5.8

④

### 종합 5.9

④

### 종합 5.10

③

### 종합 5.11

③

### 종합 5.12

①

### 종합 5.13

③

### 종합 5.14

①

### 종합 5.15

①

### 종합 5.16

②

### 종합 5.17

①

### 종합 5.18

②

### 종합 5.19

### 종합 5.1

③

### 종합 5.2

①

### 종합 5.3

④

### 종합 5.4

④

### 종합 5.5

④

### 종합 5.6

생략.

③

| **종합 5.20**

④

| **종합 5.21**

④

| **종합 5.22**

③

| **종합 5.23**

⑤

| **종합 5.24**

④

| **종합 5.25**

③

| **종합 5.26**

④

| **종합 5.27**

①

| **종합 5.28**

①

| **종합 5.29**

②

| **종합 5.30**

②

| **종합 5.31**

②

| **종합 5.32**

④

| **종합 5.33**

③

| **종합 5.34**

②

| **종합 5.35**

④

| **종합 5.36**

④

| **종합 5.37**

(b)

| **종합 5.38**

②

| **종합 5.39**

③

| **종합 5.40**

①

| **종합 5.41**

③

| **종합 5.42**

①

| **종합 5.43**

⑤

| **종합 5.44**

②

**| 종합 5.45**

(4)

**| 종합 5.46**

(2)

**| 종합 5.47**

(3)

**| 종합 5.48**

(4)

**| 종합 5.49**

(5)

**| 종합 5.50**

(4)

**| 종합 5.51**

(4)

**| 종합 5.52**

(5)

# 06다변수 미분의 응용

## (Applications of Differentiation)

### 6.1방향도함수와 그레디언트

#### 예제 1.1

생략.

#### 예제 1.2

$$(i) D_{\vec{u}} f(x, y) = \langle 3x^2 - 3y, -3x + 8y \rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$(ii) D_{\vec{u}} f(1, 2) = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

#### 예제 1.3

$$(i) \nabla f(x, y) = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

$$(ii) \nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle$$

#### 예제 1.4

$$\frac{32}{\sqrt{29}}$$

#### 예제 1.5

$$(1) \nabla f(x, y, z) = \langle \sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz) \rangle$$

$$(2) -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

#### 예제 1.6

$$(1) f_{\vec{u}}(1, 1) = 2(u_1 + u_2)$$

$$(2) \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$(3) \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle, \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

#### 예제 1.7

$$\frac{1}{5} \langle -4, 3 \rangle$$

#### 예제 1.8

$$(1) 1$$

(2)  $\langle 1, 2 \rangle$  방향으로 최댓값  $\sqrt{5}$ .

#### 예제 1.9

$$(i) \nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8} \langle -1, -2, 6 \rangle \text{ 방향}$$

$$(ii) \text{최대 증가율} : \frac{5}{8} \sqrt{41}$$

#### 예제 1.10

$$(i) \text{접평면} : 3x - 6y + 2z = -18$$

$$(ii) \text{법선의 방정식} : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{3z+9}{-2}$$

#### 예제 1.11

(1) 생략.

$$(2) \frac{2184}{25}$$

#### 예제 1.12

$$① \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$$

#### 예제 1.13

$$\frac{9}{5}$$

#### 예제 1.14

①

#### 예제 1.15

②

#### 예제 1.16

①

#### 예제 1.17

③

#### 예제 1.18

①

**예제 1.19**

①

**예제 1.20**

①

**예제 1.21**

①

**예제 1.22**

①

**예제 1.23**

④

**예제 1.24**

②

**예제 1.25**

①

**예제 1.26**

④

**예제 1.27**

④

**6.2다변수함수의 최대·최솟값****예제 2.1**

생략.

**예제 2.2**

생략.

**예제 2.3**

- (i) 임계점:  $(0, 0)$
- (ii) 안장점:  $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$

**예제 2.4**

- (i) 극솟값:  $f(1, 1) = -1 = f(-1, -1)$
- (ii) 안장점:  $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 1)$

**예제 2.5**

①

**예제 2.6**

④

**예제 2.7**

④

**예제 2.8**

③

**예제 2.9**

④

**예제 2.10**

- (i) 최댓값:  $f(3, 0) = 9$
- (ii) 최솟값:  $f(0, 0) = 0 = f(2, 2)$

**예제 2.11**

③

**예제 2.12**

④

**예제 2.13**

②

**예제 2.14**

③

**예제 2.15**

④

**예제 2.16**

④

**예제 3.9**

생략.

**예제 2.17**

④

**예제 3.10**

③

**6.3라그랑주 승수****예제 3.1** $(0, \pm 3, 0)$ **예제 3.11**

4

**예제 3.12**

202

**예제 3.2**

생략.

**예제 3.13**

②

**예제 3.3**

- 최댓값:  $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- 최솟값:  $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

**예제 3.14**

②

**예제 3.15**

③

**예제 3.4**

- 최댓값:  $\frac{1}{27}$
- 최솟값: 0

**예제 3.16**

①

**예제 3.5**

- 최댓값:  $2\sqrt{6}$
- 최솟값:  $-2\sqrt{6}$

**예제 3.17**

③

**예제 3.6** $\sqrt{56}$ **종합 6.1**

④

**예제 3.7** $2e^{-4}$ **종합 6.2**

③

**예제 3.8**

$$x = \frac{\alpha d}{a}, \quad y = \frac{\beta d}{b}, \quad z = \frac{\gamma d}{c}$$

**종합 6.3**

④

**종합 6.4**

④

$$-\frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$$

### 종합 6.5

10

### 종합 6.6

③

### 종합 6.7

④

### 종합 6.8

$$\frac{5}{3}$$

### 종합 6.9

④

### 종합 6.10

③

### 종합 6.11

②

### 종합 6.12

③

### 종합 6.13

③

### 종합 6.14

①

### 종합 6.15

$$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

### 종합 6.16

### 종합 6.17

①

### 종합 6.18

①

### 종합 6.19

⑤

### 종합 6.20

(a) 접평면:

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \left(z + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi\right) = 0$$

$$(b) -\frac{\sqrt{2}}{6}\pi - \frac{7\sqrt{2}}{480}\pi^2$$

$$(c) -4\sqrt{2}$$

### 종합 6.21

③

### 종합 6.22

②

### 종합 6.23

②

### 종합 6.24

③

### 종합 6.25

②

### 종합 6.26

④

### 종합 6.27

②

| **종합 6.28**

①

| **종합 6.29**

1

| **종합 6.30**

③

| **종합 6.31**

66

| **종합 6.32**

③

| **종합 6.33**

②

| **종합 6.34**

④

| **종합 6.35**

②

| **종합 6.36**

④

| **종합 6.37**

(a)

| **종합 6.38**

⑤

| **종합 6.39**

④

| **종합 6.40**

②

| **종합 6.41**

②

| **종합 6.42**

③

| **종합 6.43**

①

| **종합 6.44**

④

| **종합 6.45**

④

| **종합 6.46**

⑤

| **종합 6.47**

④

| **종합 6.48**

④

| **종합 6.49**

②

| **종합 6.50**

③

| **종합 6.51**

①

| **종합 6.52**

①

**| 종합 6.53**

(5)

**| 종합 6.65**

(3)

**| 종합 6.54**

- 최댓값:  $\frac{17}{8}$
- 최솟값: 0

**| 종합 6.66**

(4)

**| 종합 6.55**

(3)

**| 종합 6.67**

- (1) (4)
- (2) (3)
- (3) (4)

**| 종합 6.56**

- 4

**| 종합 6.68**

(a)

**| 종합 6.57**

(4)

**| 종합 6.69**

(e)

**| 종합 6.58**

(1)

**| 종합 6.70**

(3)

**| 종합 6.59**

(4)

**| 종합 6.71**

(5)

**| 종합 6.60**

(4)

**| 종합 6.72**

(3)

**| 종합 6.61**

(4)

**| 종합 6.73**

(4)

**| 종합 6.62**

(5)

**| 종합 6.74**

- 최댓값:  $2\sqrt{6}$
- 최솟값:  $-2\sqrt{6}$

**| 종합 6.63**

(4)

**| 종합 6.75**

- 가로:  $20\sqrt{3} - 8$
- 세로:  $20\sqrt{3} - 8$

**| 종합 6.64**

(1)

**종합 6.76**

①

**종합 6.77**

②

**종합 6.78**

⑤

**종합 6.79**

- 최댓값:  $\frac{4}{3}$
- 최솟값:  $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

**종합 6.80**

④

**종합 6.81**

④

**종합 6.82**

①

**종합 6.83**

①

**종합 6.84**

③

**종합 6.85**

⑤

**종합 6.86**

②

**종합 6.87**

③

**종합 6.88**

- (1) • 임계점:  $(0, 0), (1, 1)$
  - 안장점:  $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$
  - 극소점:  $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, -1)$
- (2) • 최댓값: 3
- 최솟값:  $-\frac{3(\sqrt{6} + 3)}{2}$

**종합 6.89**

②

**종합 6.90**

①

**종합 6.91**

②

**종합 6.92**

①

**종합 6.93**

②

**종합 6.94**

②

**종합 6.95**

③

**종합 6.96**

③

**종합 6.97**

①

**종합 6.98**

②

**| 종합 6.99**

(5)

**| 종합 6.100**

(a)

**| 종합 6.101**

(2)

**| 종합 6.102**

96

**| 종합 6.103**

(2)

**| 종합 6.104**

(2)

**| 종합 6.105**

(5)

## 07다변수 함수의 이중적분 (Double Integration)

### 7.1이중적분의 개념 및 정의

예제 1.1

34

예제 1.2

$2\pi$

예제 1.3

18

예제 1.4

불가능.

### 7.2이중적분의 계산: 반복적분

예제 2.1

- 12

예제 2.2

0

예제 2.3

1

예제 2.4

(1) 0

(2)  $4\pi^2$

예제 2.5

$$(i) \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx = \frac{1}{2}$$

$$(ii) \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy = -\frac{1}{2}$$

### 7.3일반영역에서의 이중적분

예제 3.1

$$\frac{32}{5}$$

예제 3.2

$$\frac{216}{35}$$

예제 3.3

36

예제 3.4

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$$

예제 3.5

(2)

예제 3.6

(b)

예제 3.7

(1)

예제 3.8

(2)

예제 3.9

(4)

예제 3.10

(2)

예제 3.11

(3)

예제 3.12

④

### 예제 3.13

②

### 예제 3.14

②

### 예제 4.8

②

### 예제 4.9

$$\textcircled{1} \int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} ye^x dy dx = 4e^5 - \frac{23}{2}$$

$$\textcircled{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 r^2 \sin \theta e^{r \cos \theta} dr d\theta = 4e^5 - \frac{23}{2}$$

## 7.4 극좌표상에서의 이중적분

### 예제 4.1

$$(1) D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{1}{2} \sec \theta \leq r \leq \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$(2) D = \left\{ (r, \theta) \mid \sec \theta \leq r \leq 2 \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$(3) D = \left\{ (r, \theta) \mid \csc \theta \leq r \leq 2 \csc \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

### 예제 4.10

④

### 예제 4.11

②

### 예제 4.12

③

### 예제 4.2

$$\frac{15}{2}\pi$$

### 예제 4.13

①

### 예제 4.3

$$\frac{\pi}{2}$$

### 종합 7.1

④

### 예제 4.4

$$\frac{\pi}{8}$$

### 종합 7.2

⑤

### 예제 4.5

$$\frac{3}{2}\pi$$

### 종합 7.3

③

### 예제 4.6

$$\sqrt{\pi}$$

### 종합 7.4

②

### 예제 4.7

④

### 종합 7.5

⑤

### 종합 7.6

③

| 종합 7.7

②

| 종합 7.8

②

| 종합 7.9

④

| 종합 7.10

①

| 종합 7.11

②

| 종합 7.12

②

| 종합 7.13

②

| 종합 7.14

③

| 종합 7.15

②

| 종합 7.16

①

| 종합 7.17

④

| 종합 7.18

⑤

| 종합 7.19

$\frac{1}{2}$

| 종합 7.20

④

| 종합 7.21

①

| 종합 7.22

③

| 종합 7.23

②

| 종합 7.24

②

| 종합 7.25

②

| 종합 7.26

④

| 종합 7.27

①

| 종합 7.28

①

| 종합 7.29

①

| 종합 7.30

④

| 종합 7.31

(3)

| 종합 7.32

(5)

| 종합 7.33

(2)

| 종합 7.34

(2)

| 종합 7.35

(d)

| 종합 7.36

(1)

| 종합 7.37

(5)

| 종합 7.38

(1)

| 종합 7.39

(2)

| 종합 7.40

(1)

| 종합 7.41

(4)

| 종합 7.42

$$\frac{\pi}{16}$$

| 종합 7.43

(3)

| 종합 7.44

(1)

| 종합 7.45

(3)

| 종합 7.46

(3)

| 종합 7.47

(4)

| 종합 7.48

(2)

| 종합 7.49

$$\frac{\pi}{6} (1 - e^{-4})$$

| 종합 7.50

(2)

| 종합 7.51

(4)

| 종합 7.52

(1)

| 종합 7.53

(4)

| 종합 7.54

(1)

| 종합 7.55

(4)

**| 종합 7.56**

④

**| 종합 7.57**

④

**| 종합 7.58**

①

**| 종합 7.59**

③

**| 종합 7.60**

②

**| 종합 7.61**

①

## 08이중적분의 응용(Aplications of Double Integration)

### 8.1질량, 무게중심 및 관성모멘트

#### 예제 1.1

(1)  $\frac{768}{5}$

(2)  $\left(\frac{80}{13}, \frac{20}{9}\right)$

#### 예제 1.2

$\frac{5}{24}$

#### 예제 1.3

①

#### 예제 1.4

$\left(\frac{3a}{2\pi}, \frac{3a}{2\pi}\right)$

#### 예제 1.5

(i) 면적중심 :  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(ii) 무게중심 :  $\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{14}\right)$

(iii)  $I_x = 12, I_y = \frac{39}{5}, I_0 = \frac{99}{5}$

### 8.2곡면의 면적

#### 예제 2.1

$\frac{1}{12}(27 - 5\sqrt{5})$

#### 예제 2.2

$\frac{2}{3}\pi$

#### 예제 2.3

$\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$

#### 예제 2.4

③

#### 예제 2.5

④

#### 예제 2.6

①

#### 예제 2.7

④

### 8.3이중적분의 변수변환

#### 예제 3.1

2

#### 예제 3.2

$\frac{3}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$

#### 예제 3.3

①

#### 예제 3.4

③

#### 예제 3.5

②

#### 예제 3.6

④

**예제 3.7**

(3)

(b)

**예제 3.8**

(1)

**종합 8.10**

(4)

**예제 3.9**

(4)

**종합 8.11**

(1)

**예제 3.10**

(4)

**종합 8.12**

(5)

**종합 8.1**

(4)

**종합 8.13**

(2)

**종합 8.3**

(3)

**종합 8.15**

(a)  $\frac{1}{4}$

(b)  $S = \{(u, v) \mid -4 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 8\}$

(c) 192

**종합 8.4**

(4)

**종합 8.5**

(1)

**종합 8.16**

(1)

**종합 8.6**

$a = 20$

**종합 8.17**

(4)

**종합 8.7**

(2)

**종합 8.18**

(5)

**종합 8.8**

(2)

**종합 8.19**

(2)

**종합 8.9****종합 8.20**

(5)

| 종합 8.21

(5)

| 종합 8.22

(4)

| 종합 8.23

(2)

| 종합 8.24

$$\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

| 종합 8.25

(2)

| 종합 8.26

(1)

| 종합 8.27

(4)

| 종합 8.28

(2)

| 종합 8.29

(2)

| 종합 8.30

(1)

| 종합 8.31

11

| 종합 8.32

(1)

| 종합 8.33

(2)

| 종합 8.34

(2)

| 종합 8.35

(3)

| 종합 8.36

(1)

| 종합 8.37

(4)

| 종합 8.38

(3)

| 종합 8.39

(4)

| 종합 8.40

(1)

| 종합 8.41

(1)

| 종합 8.42

(1)

| 종합 8.43

(4)

## 09다변수 스칼라함수의 삼중적분 (Triple Integration)

### 9.1삼중적분의 개념 및 정의

예제 1.1

$$\frac{27}{4}$$

예제 1.2

$$-14$$

예제 1.3

$$\frac{1}{24}$$

예제 1.4

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y-x} f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-y-x} f(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-z-y} f(x, y, z) dx dz dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-z-x} f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-x} f(x, y, z) dy dx dz \end{aligned}$$

예제 1.5

①

예제 1.6

④

예제 1.7

$$\frac{128}{15}\pi$$

예제 1.8

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+z^2}^4 f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_{x^2+z^2}^4 f(x, y, z) dy dx dz \\ &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} f(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{z^2}^4 \int_{-\sqrt{y-z^2}}^{\sqrt{y-z^2}} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_{-\sqrt{y-z^2}}^{\sqrt{y-z^2}} f(x, y, z) dx dz dy \end{aligned}$$

예제 1.9

$$\frac{4}{3}$$

예제 1.10

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_0^2 \int_y^2 \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} f(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} \int_0^x f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} \int_0^x f(x, y, z) dy dx dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-\frac{1}{2}y^2} \int_0^{\sqrt{4-2z}} f(x, y, z) dx dz dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} \int_0^{\sqrt{4-2z}} f(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

예제 1.11

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \int_0^y f(x, y, z) dz dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z) dx dz dy \\
&= \int_0^1 \int_z^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_z^{x^2} f(x, y, z) dy dz dx \\
&= \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_z^{x^2} f(x, y, z) dy dz dx
\end{aligned}$$

**예제 1.12**

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dz dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) dy dz dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) dy dx dz
\end{aligned}$$

**예제 1.13**

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy dx dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-x^2} f(x, y, z) dz dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} f(x, y, z) dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-z}} \int_0^{\sqrt{1-z}} f(x, y, z) dx dy dz \\
&\quad + \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-z}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{2y-y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx dz dy \\
&\quad + \int_0^1 \int_{2y-y^2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} f(x, y, z) dx dz dy
\end{aligned}$$

**예제 1.14**

②

**9.2 삼중적분의 응용**

**예제 2.1**

$$\int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} \int_0^{2-x-2y} dz dy dx = \frac{1}{3}$$

**예제 2.2**

6

**예제 2.3**

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_y^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x dy dz dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^x dy dx dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_y^{\sqrt{1-z^2}} dx dz dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_y^{\sqrt{1-z^2}} dx dy dz
\end{aligned}$$

**예제 2.4**

$$8\sqrt{2}\pi$$

**예제 2.5**

⑤

**예제 2.6**

②

**예제 2.7**

$$\left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$$

**예제 2.8**

$$(i) 질량 : \frac{4}{3}k \quad (k : \text{비례상수})$$

(ii) 무게중심 :  $\left(\frac{32}{35}, \frac{16}{35}, 1\right)$

$$\frac{16}{5}\pi$$

### 예제 3.8

①

## 9.3원기등좌표와 삼중적분

### 예제 3.1

(1)  $(-1, \sqrt{3}, 1)$

(2)  $\left(3\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi, -7\right) = \left(3\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}, -7\right) = \dots$

### 예제 3.2

(1)  $z^2 = x^2 + y^2$

(2)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$

### 예제 3.3

(1)  $z = 4 - r^2$

(2)  $r = 2\cos\theta$

### 예제 3.4

(1)  $\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$

(2)  $\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1-r\}$

(3)  $\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1-r^2 \leq z \leq 4\}$

(4)  $\left\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 4-r^2\right\}$

(5)  $\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{2-r^2} \leq z \leq \sqrt{2-r^2}\}$

(6)  $\{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2\}$

(7)

$\{(r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{2-r^2} \leq z \leq \sqrt{2-r^2}\}$

### 예제 3.5

$\frac{12\pi}{5}k$  ( $k$  : 비례상수)

### 예제 3.6

$\frac{5}{2}\pi$

### 예제 3.7

## 9.4구면좌표와 삼중적분

### 예제 4.1

(1)  $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right)$

(2)  $\left(4, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$

### 예제 4.2

(1)  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

(2)  $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$

(3)  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 + y^2) = 2xy$

(4)  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$

### 예제 4.3

(1)  $\rho = \csc\phi\cot\phi = \cos\phi\csc^2\phi$

(2)  $\rho^2(\sin^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

### 예제 4.4

(1)  $\{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$

(2)  $\{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq \cos\phi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\}$

(3)  $\{(\rho, \theta, \phi) \mid 2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$

### 예제 4.5

$\frac{4}{3}(e-1)\pi$

### 예제 4.6

$\frac{\pi}{8}$

**예제 4.7**

$$2\pi$$

**종합 9.5**

(5)

**예제 4.8**

(4)

**종합 9.6**

$$\iiint_E \cos(y^2) dV = \int_0^1 \sin(9t^2) dt$$

**예제 4.9**

(2)

**종합 9.7**

(5)

**9.5삼중적분과 변수변환****예제 5.1**

$$8\pi$$

**종합 9.8**

(4)

**예제 5.2**

(1)

**종합 9.9**

(4)

**예제 5.3**

$$\frac{4}{3}\pi abc$$

**종합 9.10**

$$\frac{2}{15}$$

**종합 9.11**

(1)

**예제 5.4**

$$2\pi^2 a^2 b$$

**종합 9.12**

(4)

**종합 9.1**

(1)

**종합 9.13**

(4)

**종합 9.2**

(2)

**종합 9.14**

(3)

**종합 9.3**

(4)

**종합 9.15**

(4)

**종합 9.4**

(1)

**종합 9.16**

(a)

**| 종합 9.17**

(3)

**| 종합 9.28**

(4)

**| 종합 9.18**

(2)

**| 종합 9.29**

(4)

**| 종합 9.19**

(3)

**| 종합 9.30**

(3)

**| 종합 9.20**

(4)

**| 종합 9.31**

(2)

**| 종합 9.21**

(4)

**| 종합 9.32**

(4)

**| 종합 9.22**

(3)

**| 종합 9.33**

(3)

**| 종합 9.23**

(2)

**| 종합 9.34**

(4)

**| 종합 9.24**

(4)

**| 종합 9.35**

(2)

**| 종합 9.25**

(3)

**| 종합 9.36**

(4)

**| 종합 9.26**

(4)

**| 종합 9.37**

(2)

**| 종합 9.27**

$$(a) h = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b)

(i)  $a$ 의 범위:  $a \geq \sqrt{2}$ (ii) 보이는 부분의 겉넓이:  $2\pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ **| 종합 9.38**

(2)

**| 종합 9.39**

(5)

**| 종합 9.40**

(3)

| 종합 9.41

②

| 종합 9.42

④

## 10선적분(Line Integral)

### 예제 2.6

①

### 10.1벡터장

#### 예제 1.1

생략.

#### 예제 2.7

생략.

#### 예제 1.2

생략.

#### 예제 1.3

$$(1) \nabla f(\mathbf{x}) = \langle 2xy, x^2 - 3y^2 \rangle$$

$$(2) \nabla f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \langle x, y, z \rangle$$

$$(3) \nabla f(\mathbf{x}) = -\frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \langle x, y, z \rangle$$

#### 예제 1.4

②

### 10.3벡터함수의 선적분

#### 예제 3.1

$$\frac{19}{2}$$

#### 예제 3.2

$$-\frac{2}{3}$$

#### 예제 3.3

$$\frac{27}{28}$$

### 10.2스칼라함수의 선적분

#### 예제 2.1

$$2\pi + \frac{2}{3}$$

#### 예제 2.2

$$\frac{11 + 5\sqrt{5}}{6}$$

#### 예제 2.3

$$\sqrt{2}\pi$$

#### 예제 2.4

①

#### 예제 2.5

①

#### 예제 3.4

④

#### 예제 3.5

②

#### 예제 3.6

$$(1) -\frac{5}{6}$$

$$(2) 40 + \frac{5}{6} = \frac{245}{6}$$

#### 예제 3.7

③

#### 예제 3.8

①

**예제 3.9**

(i)  $\int_{C_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$

(ii)  $\int_{C_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} < 0$

**예제 3.10**

$$3\pi + \frac{2}{3}$$

**예제 3.11**

0

**예제 3.12**

생략.

**예제 3.13**

생략.

**예제 3.14**

생략.

**예제 3.15**

생략.

**10.4선적분의 기본정리****예제 4.1**

생략.

**예제 4.2**

생략.

**예제 4.3**

$$GMm\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{13}\right)$$

**예제 4.4**

40

**예제 4.5**

(1) 보존적이 아님.

(2)  $f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + k$

(3)  $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + k$

(4)  $f(x, y) = e^x \sin y + k$

(5)  $f(x, y) = ye^x + x \sin y + k$

(6)  $f(x, y) = xe^{xy} + k$

(7)  $f(x, y, z) = xy^y + ye^{3z} + k$

(8)  $f(x, y, z) = xyz + z^2 + k$

**예제 4.6** 벡터장  $\mathbb{F}$ 가 보존적(conservative)이고 세 곡선의 시점과 종점이 같기 때문에  $\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ 의 값은 16 으로 모두 같다.

**예제 4.7**

생략.

**예제 4.8**

④

**예제 4.9**

③

**예제 4.10**

④

**예제 4.11**

②

**예제 4.12**

①

**예제 4.13**

$\pi$

**예제 4.14**

②

예제 4.15

(4)  $2\pi$

예제 5.11

(3)

## 10.5그린정리

예제 5.1

$\frac{1}{6}$

예제 5.2

$36\pi$

예제 5.3

$ab\pi$

예제 5.4

생략.

예제 5.5

$\frac{14}{3}$

예제 5.6

생략.

예제 5.7

(2)

예제 5.8

(2)

예제 5.9

(3)

예제 5.10

(2)

예제 5.13

$\frac{1}{3}$

예제 5.14

$\frac{7}{10}$

예제 5.15

(3)

예제 5.16

(3)

| 종합 10.1

(2)

| 종합 10.2

(3)

| 종합 10.3

(2)

| 종합 10.4

(4)

| 종합 10.5

(2)

| 종합 10.6

(5)

| 종합 10.7

①

①

| 종합 10.8

②

| 종합 10.20

②

| 종합 10.9

④

| 종합 10.21

④

| 종합 10.10

④

| 종합 10.22

⑤

| 종합 10.11

④

①

| 종합 10.12

③

| 종합 10.23

②

| 종합 10.13

④

| 종합 10.25

생략.

| 종합 10.14

①

| 종합 10.26

③

| 종합 10.15

⑤

| 종합 10.27

④

| 종합 10.16

③

| 종합 10.28

8

| 종합 10.17

(a) 생략.

(b) 2

③

| 종합 10.30

③

| 종합 10.18

②

| 종합 10.31

⑤

| 종합 10.19

**종합 10.32**

(2)

(4)

**종합 10.33**

(1)

**종합 10.45**

(4)

**종합 10.34**

(2)

**종합 10.46**

(4)

**종합 10.35**

12

**종합 10.47**

(2)

**종합 10.36**

(4)

**종합 10.48**

(5)

**종합 10.37**

(4)

**종합 10.49**

(4)

**종합 10.38**

(2)

**종합 10.50**

(3)

**종합 10.39**

(a) 생략.

(b)  $2\pi$ **종합 10.51**

(1)

**종합 10.40**

(1)

**종합 10.52**

(1)

**종합 10.41**

(5)

**종합 10.53**

(1)

**종합 10.42**

(3)

**종합 10.54**

(2)

**종합 10.43**

(1)

**종합 10.55**

(1)

**종합 10.44**

**| 종합 10.56**

(3)

**| 종합 10.57**

(3)

**| 종합 10.58**

(1)

**| 종합 10.59**

(a)

**| 종합 10.60**

(3)

**| 종합 10.61**

(1)

**| 종합 10.62**

(1)  $-\frac{\pi}{2}$

(2)  $2\pi$

(3)  $\frac{3\pi}{2}$

**| 종합 10.63**

(2)

**| 종합 10.64**

(1) ⑤

(2) ①

(3) ③

**| 종합 10.65**

(3)

# 11다변수 벡터함수-곡면적분 (Surface Integral)

## 11.1회전연산자와 발산연산자

### 예제 1.1

생략.

### 예제 1.2

생략.

### 예제 1.3

$$(1) \nabla \times \mathbf{F} = \langle -2y - xy, x, yz \rangle$$

(2) 보존적이 아니다.

### 예제 1.4

$$(1) \nabla \times \mathbf{F} = \vec{0}$$

$$(2) f(x, y, z) = xy^2z^3 + k$$

### 예제 1.5

생략.

### 예제 1.6

생략.

### 예제 1.7

$$(1) (i) \nabla \times \mathbf{F} = \langle -x^2, 3xy, -xz \rangle$$

$$(ii) \nabla \cdot \mathbf{F} = yz$$

$$(2) (i) \nabla \times \mathbf{F} = \langle x(z^2 - y^2), y(x^2 - z^2), z(y^2 - x^2) \rangle$$

$$(ii) \nabla \cdot \mathbf{F} = 6xyz$$

$$(3) (i) \nabla \times \mathbf{F} = \langle ze^x, xye^z - yze^x, -xe^z \rangle$$

$$(ii) \nabla \cdot \mathbf{F} = y(e^z + e^x)$$

$$(4) (i) \nabla \times \mathbf{F} = \langle -2y - xy, x, yz \rangle$$

$$(ii) \nabla \cdot \mathbf{F} = z + xz$$

(5)

$$(i) \nabla \times \mathbf{F} = \left\langle \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - e^{xy}\cos z, -\frac{yz}{x^2+z^2}, ye^{xy}\sin z \right\rangle$$

$$(ii) \nabla \cdot \mathbf{F} = xe^{xy}\sin z - \frac{xy}{x^2+z^2}$$

$$(6) (i) \nabla \times \mathbf{F} = \vec{0}$$

$$(ii) \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

### 예제 1.8

$$(1) f(x, y, z) = xy^2z^3 + k$$

$$(2) f(x, y, z) = xe^{yz} + k$$

## 11.2스칼라함수의 곡면적분

### 예제 2.1

$$x^2 + z^2 = 4$$

### 예제 2.2

$$\vec{r}(\phi, \theta) = \langle r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi \rangle$$

$$(0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi)$$

### 예제 2.3

$$x = 3\cos \theta, y = 3\sin \theta, z = z$$

$$(0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1)$$

### 예제 2.4

$$\vec{r}(x, y) = \langle x, y, x^2 + 2y^2 \rangle, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

### 예제 2.5

$$\vec{r}(x, y) = \langle x, y, 2\sqrt{x^2 + y^2} \rangle, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

### 예제 2.6

$$\vec{r}(x, \theta) = \langle x, \sin x \cos \theta, \sin x \sin \theta \rangle,$$

$$\forall (x, \theta) \in D = \{(x, \theta) \mid 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

### 예제 2.7

$$x + 2y - 2z = -3$$

### 예제 2.8

$$4\pi r^2$$

**예제 2.9**

$$\frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1)$$

**예제 2.10**

④

**예제 2.11**

①

**예제 2.12**

④

**예제 2.13**

③

**예제 2.14**

①

**예제 2.15**

②

**예제 2.16**

$$\frac{4}{3}\pi$$

**예제 2.17**

$$\frac{13\sqrt{2}}{3}$$

**예제 2.18**

$$\left(0, 0, \frac{1}{2}r\right)$$

**예제 2.19**

$$\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$$

**11.3 벡터함수의 곡면적분****예제 3.1**

$$\vec{r}(\phi, \theta) = \langle r \sin\phi \cos\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\phi \rangle$$

$$(0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta}{\| \vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta \|}$$

$$= \langle \sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \langle x, y, z \rangle$$

**예제 3.2**

$$\frac{4}{3}\pi$$

**예제 3.3**

$$\frac{\pi}{2}$$

**11.4 스토크스정리****예제 4.1**

$$\pi$$

**예제 4.2**

$$0$$

**예제 4.3**

$$-2\pi$$

**예제 4.4**

$$4$$

**예제 4.5**

③

**예제 4.6**

$$-18\pi$$

예제 4.7

①

### 11.5가우스 발산정리

예제 5.1

$$\frac{4}{3}\pi$$

예제 5.2

$$\frac{184}{35}$$

예제 5.3

$$4\pi$$

예제 5.4

$$4\pi$$

예제 5.5

$$4\pi cK$$

예제 5.6

③

예제 5.7

$$4\pi$$

예제 5.8

①

예제 5.9

③

예제 5.10

$$\frac{\pi}{2}$$

예제 5.11

②

예제 5.12

①

예제 5.13

①

예제 5.14

①

종합 11.1

③

종합 11.2

③

종합 11.3

⑤

종합 11.4

④

종합 11.5

②

종합 11.6

①

종합 11.7

③

종합 11.8

③

종합 11.9

④

| **종합 11.10**

②

| **종합 11.11**

④

| **종합 11.12**

④

| **종합 11.13**

④

| **종합 11.14**

③

| **종합 11.15**

(c)

| **종합 11.16**

76

| **종합 11.17**

④

| **종합 11.18**

④

| **종합 11.19**

13

| **종합 11.20**

①

| **종합 11.21**

①

| **종합 11.22**

②

| **종합 11.23**

③

| **종합 11.24**

②

| **종합 11.25**

④

| **종합 11.26**

③

| **종합 11.27**

⑤

| **종합 11.28**

④

| **종합 11.29**

①

| **종합 11.30**

③

| **종합 11.31**

④

| **종합 11.32**

(c)

| **종합 11.33**

②

| **종합 11.34**

②

**종합 11.35**

(4)

**종합 11.47**

0

**종합 11.36**

(3)

**종합 11.48**

(4)

**종합 11.37**

(3)

**종합 11.49**

(1)

**종합 11.38**

(4)

**종합 11.50**

(4)

**종합 11.39**

(5)

**종합 11.51**

(3)

**종합 11.40**

(3)

**종합 11.52**

(4)

**종합 11.41**

(3)

**종합 11.53**

(3)

**종합 11.42**

(a) 생략.

(b) 0

**종합 11.54**

(3)

**종합 11.43**

(4)

**종합 11.55**

(2)

**종합 11.44**

(4)

**종합 11.56**

(e)

**종합 11.45**

(4)

**종합 11.57**

(3)

**종합 11.46**

(3)

**종합 11.58**

(1)